Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

Em torno das interpretações funcionais da aritmética

Jaime Gaspar

Mestrado em Matemática
(Álgebra, Lógica e Fundamentos)

2007

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

Em torno das interpretações funcionais da aritmética

Jaime Gaspar

Dissertação orientada pelo
Professor Doutor Fernando Ferreira

Mestrado em Matemática
(Álgebra, Lógica e Fundamentos)

2007

Agradecimentos

Gostava de agradecer ao meu orientador, Professor Doutor Fernando Ferreira, por me cativar para esta área da matemática, pelo seu apoio, direcção, compreensão e enorme paciência com a minha insistência nos detalhes durante o último ano e ainda pela sua ajuda nos preparativos de um futuro doutoramento.

Gostava também de agradecer à minha colega Lic. Patrícia Engrácia pela ajuda com as contas do exemplo 77.

Jaime Gaspar
Lisboa, 11 de Julho de 2007

Resumo e palavras-chave

Resumo As interpretações funcionais I da aritmética que estudamos são aplicações que a cada fórmula A da aritmética associam uma fórmula A^I da forma $\forall \underline{x} \exists \underline{y} A_I(\underline{x}, \underline{y})$ ou $\exists \underline{x} \forall \underline{y} A_I(\underline{x}, \underline{y})$ (onde $\underline{x}$ e $\underline{y}$ são uplos de variáveis).

Vamos estudar sistematicamente quatro resultados associados a cada interpretação funcional.

1. <u>Teorema da correcção</u> Se A é demonstrável (numa teoria aritmética fortalecida com princípios extra), então existem termos $\underline{t}$ que testemunham os quantificadores existenciais de A^I. Este teorema extrai informação das demonstrações, codificada nos termos.
2. <u>Teorema da caracterização</u> A aritmética fortalecida com princípios extra prova a equivalência entre A e A^I. Este teorema mede o deslocamento de A para A^I e caracteriza os princípios extra que surgem no teorema da correcção.
3. <u>Teorema da extracção de programas</u> Se $\forall x \exists y A_{sq}(x, y)$ é demonstrável (A_{sq} é uma fórmula sem quantificadores), então existe um termo $t(x)$ tal que $\forall x A_{sq}\big(x, t(x)\big)$.
4. <u>Teorema da conservação</u> Se a aritmética fortalecida com princípios extras prova $\forall x \exists y A_{sq}(x, y)$, então a aritmética sem os princípios extra prova a mesma fórmula.

Na primeira parte da tese começamos por fazer uma exposição detalhada da aritmética de Peano e da sua homóloga intuicionista, a aritmética de Heyting. De seguida estudamos as interpretações funcionais de Gödel e de Shoenfield, compomos a primeira com uma tradução negativa (que permite passar da aritmética de Peano para a aritmética de Heyting), e factorizamos a segunda por meio da primeira e de outra tradução negativa.

Na segunda parte da tese adicionamos à aritmética um símbolo de desigualdade e estudamos duas interpretações funcionais talhadas para obter majorantes de variáveis quantificadas existencialmente, não testemunhas precisas delas.

Palavras-chave Aritmética, intuicionismo, interpretação de demonstrações, interpretação funcional, majoração, teoria da demonstração, tradução negativa.

Abstract The functional interpretations I of arithmetic that we study are applications that to each formula A of arithmetic assigns a formula A^I of the form $\forall \underline{x} \exists \underline{y} A_I(\underline{x}, \underline{y})$ or $\exists \underline{x} \forall \underline{y} A_I(\underline{x}, \underline{y})$ (where $\underline{x}$ and $\underline{y}$ are tuples of variables).

We will systematically study four results associated with each functional interpretation.

1. <u>Soundness theorem</u> If A is provable (in an arithmetic theory strengthened with extra principles), then there exists terms $\underline{t}$ that witness the existencial quantifiers of A^I. This theorem extracts information from proofs, codified in the terms.

2. <u>Characterization theorem</u> The arithmetic strengthened with extra principles proves the equivalence between A and A^I. This theorem measures the displacement from A to A^I and characterizes the extra principles that appear in the soundness theorem.

3. <u>Theorem on program extraction</u> If $\forall x \exists y A_{qf}(x, y)$ is provable (A_{qf} is a quantifier-free formula), then there exists a term $t(x)$ such that $\forall x A_{qf}\big(x, t(x)\big)$.

4. <u>Conservation theorem</u> If the arithmetic strengthened with extra principles proves $\forall x \exists y A_{qf}(x, y)$, then the arithmetic without the extra principles proves the same formula.

In the first part of the thesis we start by doing a detailed exposition of Peano arithmetic and it intuitionistic homologous, Heyting arithmetic. After we study the functional interpretations of Gödel and Shoenfield, we compose the former with a negative translation (which allows to go from Peano arithmetic to Heyting arithmetic), and we factorize the latter by means of the former and another negative translation.

In the second part of the thesis we add to arithmetic an inequality symbol and we study two functional interpretation taylored to obtain majorants of existencially quantified variables, not precise witnesses for these.

Keywords Arithmetic, intuitionism, functional interpretation, majorizability, negative translation, proof interpretation, proof theory.

Introdução

A presente tese gira em torno das interpretações funcionais da aritmética. Por isso, parece-nos apropriado iniciar a introdução mencionando as teorias aritméticas que vamos considerar e a noção de interpretação funcional.

Vamos considerar uma variante da bem conhecido aritmética de Peano PA e a sua homóloga intuicionista, a aritmética de Heyting HA.

As interpretações funcionais I que consideramos são aplicações que a cada fórmula A associam uma fórmula A^I. Consoante a interpretação I em questão, a fórmula A^I será da forma

$$\text{(i)}\ \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_I(\underline{x}, \underline{y}) \qquad \text{ou} \qquad \text{(ii)}\ \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_I(\underline{x}, \underline{y}),$$

onde $A_I(\underline{x}, \underline{y})$ é uma fórmula sem quantificadores e $\underline{x} = x_1, \ldots, x_m$ e $\underline{y} = y_1, \ldots, y_n$ são uplos de variáveis. Regra geral, uma interpretação funcional tem dois resultados importantes associados.

1. <u>Teorema da correcção</u> O teorema da correcção diz que para certas teorias aritméticas TA e TA', se $\mathsf{TA} \vdash A$ (isto é, TA prova A), então a partir dessa demonstração podemos extrair de forma algorítmica testemunhas $\underline{t}$ para os quantificadores existenciais de A^I. No caso (i) isto significa $\mathsf{TA}' \vdash \forall \underline{y} A_I(\underline{t}, \underline{y})$ (as testemunhas não dependem dos $\underline{y}$) e no caso (ii) significa $\mathsf{TA}' \vdash \forall \underline{x} A_I\big(\underline{x}, \underline{t}(\underline{x})\big)$ (as testemunhas dependem dos $\underline{x}$).

2. <u>Teorema da caracterização</u> O teorema da caracterização diz que com a ajuda de certos princípios lógicos P (como casos particulares da lei da dupla negação, o axioma da escolha, etc.) temos $\mathsf{TA} + \mathsf{P} \vdash A \leftrightarrow A^I$.

O que pretendemos com uma interpretação funcional é obter informação acerca de A. Mais precisamente, extrair informação a partir de uma demonstração de A. Os teoremas da correcção dão informação codificada nas testemunhas $\underline{t}$, mas essa informação refere-se a A^I, não a A. É verdade que $\mathsf{TA} + \mathsf{P} \vdash A \leftrightarrow A^I$ e tal equivalência permite transferir a informação sobre A^I para A, mas a equivalência prova-se numa teoria $\mathsf{TA}+\mathsf{P}$ mais forte do que o desejável, devido aos princípios extra P. Não obstante, se impusermos certas restrições sobre A (por exemplo, ser uma fórmula sem quantificadores), já temos $\mathsf{TA} \vdash A \leftrightarrow A^I$. Os teoremas da caracterização podem ser encarados como medidas do quão acentuado é o deslocamento $A \rightsquigarrow A^I$: quanto mais forte forem os princípios P necessários para que $\mathsf{TA} + \mathsf{P} \vdash A \leftrightarrow A^I$, maior é o deslocamento. Também permitem caracterizar a teoria TA que surge no teorema da caracterização, no sentido de garantirem que ela é a maior teoria que torna o teorema da caracterização verdadeiro.

Iremos essencialmente usar os teoremas da correcção para obter duas classes de teoremas.

3. Teorema da extracção de programas Se A tiver certas restrições, como ser da forma $\forall x \exists y A_{sq}(x, y)$ onde $A_{sq}(x, y)$ é uma fórmula sem quantificadores, então o deslocamento $A \rightsquigarrow A^I$ é reduzido, pelo que o teorema da extracção, neste caso particular, pode ser reenunciado dizendo que se $\mathsf{TA} \vdash \forall x \exists y A_{sq}(x, y)$, então $\mathsf{TA}' \vdash \forall x A_{sq}\big(x, t(x)\big)$. Encaramos esta testemunha t como sendo um programa que recebe com "entrada" um x e dá como "saída" um $y = t(x)$ tal que $A_{sq}(x, y)$.

4. Teorema da conservação Umas vez provado $\mathsf{TA}' \vdash \forall x A_{sq}\big(x, t(x)\big)$, concluímos $\mathsf{TA}' \vdash \forall x \exists y A_{sq}(x, y)$ (basta tomar $y = t(x)$). Obtemos assim um resultado de conservação: se $\mathsf{TA} \vdash \forall x \exists y A_{sq}(x, y)$, então $\mathsf{TA}' \vdash \forall x \exists y A_{sq}(x, y)$, isto é, TA é conservativo sobre TA' relativamente a fórmulas da forma $\forall x \exists y A_{sq}(x, y)$.

Os quatro teoremas mencionados são resultados que variam consoante a interpretação funcional. Iremos estudá-los sistematicamente para cada interpretação funcional.

Passamos agora a descrever o conteúdo dos capítulos desta tese.

Capítulo 1 Antes de tratarmos das interpretações funcionais, fazemos um estudo das teorias aritméticas que vamos considerar. É esse o objectivo do primeiro capítulo.

As aritméticas que vamos considerar são essencialmente duas: a aritmética de Peano PA e a aritmética de Heyting HA. Estas duas aritméticas têm os mesmos axiomas aritméticos (isto é, axiomas para lidar com a igualdade, o sucessor, a recursão e a indução), diferindo apenas na lógica que lhes está subjacente. PA tem subjacente a lógica clássica, que (informalmente) podemos definir como sendo a lógica usual em matemática. HA tem subjacente a lógica intuicionista, que (sem grande rigor) é a lógica clássica excepto a lei do terceiro excluído, a lei da dupla negação e o método de redução ao absurdo. Isto significa que nas demonstrações dentro de PA é-nos permitido usar todas as leis da lógica, enquanto nas demonstrações dentro de HA é-nos proibido recorrer às referidas leis e método. Uma vez que há esta diferença relativa à lógica subjacente às teorias aritméticas, achámos conveniente, antes de tratarmos das aritméticas, fazermos uma breve formalização das lógicas clássica e intuicionista.

As teorias aritméticas que vamos considerar vão ser teorias em todos os tipos finitos. Informalmente, isto significa que alguns objectos da teoria serão encarados como números naturais, outros como funções pertencentes a $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, outros ainda como funções pertencentes a $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})}$, etc. Desta forma, as nossas teorias aritméticas terão a capacidade de lidar com funções de números naturais.

O primeiro resultado importante que vamos provar, o teorema da completude combinatorial, é precisamente acerca de funções. Ele diz-nos que algumas funções podem ser representadas dentro da teoria aritmética por meio de objectos chamados termos. Mais precisamente, diz-nos que dado um termo $t(x)$ onde ocorre uma variável x, podemos construir um segundo termo que representa dentro da teoria a função $x \mapsto t(x)$.

O segundo resultado importante diz-nos que toda a função primitiva recursiva pode ser representada dentro da teoria aritmética por um termo. Em particular, este resultado dá à nossa teoria aritmética a capacidade para lidar com operações aritméticas elementares, como a adição e o produto.

Apesar de em geral a lei do terceiro excluído não valer em HA, porque a lógica subjacente é a lógica intuicionista, conseguimos provar que ela vale para fórmulas A_{sq} sem quantificadores, isto é, $\mathsf{HA} \vdash A_{sq} \vee \neg A_{sq}$. Este é o nosso terceiro resultado importante.

E finalmente, já a terminar o primeiro capítulo, vamos provar que é possível definir, dentro das teorias aritméticas, termos por casos, desde que os casos não tenham quantificadores. Isto significa que dados termos t_1 e t_2 e uma fórmula sem quantificadores $A_{sq}(x)$, existe um terceiro termo $q(x)$ cujo comportamento altera-se em função de $A_{sq}(x)$: se para certo x temos $A_{sq}(x)$, então $q(x)$ comporta-se como t_1, caso contrário comporta-se como t_2. Este resultado, de aspecto mais técnico, é importante na demonstração dos teoremas da correcção.

Capítulo 2 No segundo capítulo tratamos do exemplo por excelência de uma interpretação funcional: a interpretação funcional de Gödel D. O tratamento que D dá à implicação é o seu aspecto menos claro, pelo que o motivamos de duas formas diferentes. Também o tratamento da disjunção, embora mais compreensível, não é o mais natural, pelo que explicamos o que falhava na demonstração do teorema da correcção se optássemos pelo tratamento natural. Aproveitamos o teorema da correcção para provar que $\mathsf{HA}+\mathsf{P}$ (para certos princípios P) é construtiva no seguinte sentido: sempre que $\mathsf{HA} + \mathsf{P} \vdash \exists x A(x)$, é possível obter uma testemunha t para o quantificador existencial (isto é, $\mathsf{HA} + \mathsf{P} \vdash A(t)$), e sempre que $\mathsf{HA} + \mathsf{P} \vdash A \vee B$, então $\mathsf{HA} + \mathsf{P} \vdash A$ ou $\mathsf{HA} + \mathsf{P} \vdash B$. Terminamos o capítulo com um exemplo do cálculo de testemunhas t.

Capítulo 3 No terceiro capítulo tratamos de traduções negativas. Uma tradução negativa N é uma aplicação $A \mapsto A^N$ tal que se $\mathsf{PA} \vdash A$, então $\mathsf{HA} \vdash A^N$. Neste sentido, interpreta a aritmética com lógica clássica na aritmética com lógica intuicionista. Vamos considerar duas traduções negativas: a de Kuroda Ku e a de Krivine, esta última com duas versões, Kr e Kr_m.

A tradução Ku será usada no capítulo 5. No entanto, aproveitamos já o seu teorema da correcção para obter de forma extremamente simples um teorema de conservação: se $\mathsf{PA} \vdash A_{sq}$, então $\mathsf{HA} \vdash A_{sq}$.

As traduções Kr e Kr_m são apresentadas neste capítulo mas o seu uso é adiado até ao capítulo 6.

Capítulo 4 No quarto capítulo compomos a interpretação funcional de Gödel D com a tradução negativa de Kuroda Ku. Obtemos desta forma uma interpretação funcional $Ku\,D$ de PA em HA: por meio de Ku passamos de PA para HA, e em HA usamos D para extrair informação.

$$\mathsf{PA} \xrightarrow{Ku} \mathsf{HA} \xrightarrow{D} \mathsf{HA}$$

Capítulo 5 No quarto capítulo vimos como obter, em dois passos, uma interpretação funcional de PA em HA compondo a interpretação funcional de Gödel D com a tradução negativa de Kuroda Ku. No quinto capítulo apresentamos a interpretação funcional de Shoenfield, em três versões S, S_m e S_{mm}, que também interpreta PA em HA, mas directamente, isto é, num único passo sem a ajuda de uma tradução negativa.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{PA} \arrow[r, "Ku"] \arrow[rr, bend right, "S"'] & \mathsf{HA} \arrow[r, "D"] & \mathsf{HA} \end{tikzcd}$$

As três versões diferem no tratamento que dão à disjunção. Somos detalhados no estudo de S e mais breves no estudo de S_m e S_{mm}. Terminamos o capítulo provando a equivalência entre S, S_m e S_{mm}.

Capítulo 6 No quarto capítulo vimos como interpretar funcionalmente PA em HA em dois passos usando a interpretação funcional de Gödel D e uma tradução negativa N, e no quinto capítulo vimos como o fazer em um passo usando a interpretação funcional de Shoenfield S.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{PA} \arrow[r, "N"] \arrow[rr, bend right, "S"'] & \mathsf{HA} \arrow[r, "D"] & \mathsf{HA} \end{tikzcd}$$

Este facto naturalmente levanta uma questão: será que podemos factorizar S na forma $S = N\,D$ para alguma tradução negativa N? Daremos uma resposta afirmativa com $N = Kr$. Uma vez que temos três versões S, S_m e S_{mm} da interpretação funcional de Shoenfield e duas versões Kr e Kr_m da tradução negativa de Krivine, faremos este estudo da factorização com as várias versões.

Capítulo 7 Com o sétimo capítulo entramos nas segunda parte desta tese. Vamos agora estudar interpretações funcionais limitadas, que são interpretações funcionais talhadas não para extrair testemunhas exactas t para quantificações existenciais $\exists x A(x)$, isto é, objectos t tais que $A(t)$, mas para extraírem majorantes t para as quantificações existenciais, isto é, objectos t tais que $\exists x \trianglelefteq t A(x)$.

No capítulo sete retomamos o estudo das aritméticas PA e HA *per si*, estendendo--lhes a linguagem com uma desigualdade $\trianglelefteq$. Começamos por estudar a formalização dentro das teorias aritméticas da desigualdade usual $\leq$ entre números naturais e da noção de máximo. Finalmente tratamos das novas teorias aritméticas $\mathsf{PA}_{\trianglelefteq}$ e $\mathsf{HA}_{\trianglelefteq}$ munidas com a desigualdade $\trianglelefteq$ e estudamos todos os resultados de que precisamos para trabalhar com as interpretações funcionais limitadas.

Capítulo 8 No oitavo capítulo estudamos uma interpretação funcional limitada B que podemos dizer ser uma homóloga limitada da interpretação funcional de Gödel D.

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{HA} & \xrightarrow{D} & \mathsf{HA} \\ \mathsf{HA}_{\trianglelefteq} & \xrightarrow[B]{} & \mathsf{HA}_{\trianglelefteq} \end{array}$$

Capítulo 9 No oitavo capítulo estendemos a tradução negativa de Kuroda Ku ao contexto da aritmética munida com $\trianglelefteq$.

Capítulo 10 No décimo capítulo compomos a interpretação funcional limitada B com a tradução negativa de Kuroda Ku estendida, à imagem do que fizemos no capítulo quatro com a interpretação funcional de Gödel D e a tradução negativa de Kuroda Ku original, obtendo assim uma interpretação funcional limitada de $\mathsf{PA}_{\trianglelefteq}$ em $\mathsf{HA}_{\trianglelefteq}$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{PA} & \xrightarrow{Ku} & \mathsf{HA} & \xrightarrow{D} & \mathsf{HA} \\ \mathsf{PA}_{\trianglelefteq} & \xrightarrow[Ku]{} & \mathsf{HA}_{\trianglelefteq} & \xrightarrow[B]{} & \mathsf{HA}_{\trianglelefteq} \end{array}$$

Capítulo 11 No décimo primeiro e último capítulo, apresentamos a interpretação funcional limita à Shoenfield M, uma homóloga limitada à tradução de Shoenfield S, que tal como S interpreta directamente a aritmética de Peano num único passo sem a ajuda de uma tradução negativa.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{PA} \arrow[r, "Ku"] \arrow[rr, bend right, "S"'] & \mathsf{HA} \arrow[r, "D"] & \mathsf{HA} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{PA}_{\trianglelefteq} \arrow[r, "Ku"] \arrow[rr, bend right, "M"'] & \mathsf{HA}_{\trianglelefteq} \arrow[r, "B"] & \mathsf{HA}_{\trianglelefteq} \end{tikzcd}$$

Conteúdo

Parte I

Interpretações funcionais canónicas

Capítulo 1

Lógica e aritmética

1.1 Sistemas de dedução formal

Precisamos de começar por mencionar alguma notação que vamos usar ao longo de todo o texto. A segunda e a terceira alíneas seguintes servem para podermos desfazer-nos de alguns parênteses na escrita das fórmulas sem criar ambiguidade, e as restantes alíneas contêm notação miscelânea.

Notacao 1. Sejam A e B fórmulas, t e q termos e x e y variáveis.

1. Vamos abreviar um uplo (eventualmente vazio) de termos $t_1, \ldots, t_n$ por $\underline{t}$.

2. Convencionamos que $\neg$, $\forall$ e $\exists$ têm prioridade sobre $\wedge$ e $\vee$, que por sua vez têm prioridade sobre $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$. Atendendo a este convenção, podemos por vezes eliminar parênteses das fórmulas desde que não haja ambiguidade.

3. Denotamos a substituição simultânea de variáveis $\underline{x}$ por termos $\underline{t}$ na fórmula $A(\underline{x})$ (respectivamente, no termo $q(\underline{x})$) por $A[\underline{t}/\underline{x}]$ ou simplesmente por $A(\underline{t})$ (respectivamente, $q[\underline{t}/\underline{x}]$ ou $q(\underline{t})$).
   Sejam $\diamond \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ e $\exists \in \{\forall, \exists\}$. Interpretamos $A \diamond B[\underline{t}/\underline{x}]$ e $\exists y A[\underline{t}/\underline{x}]$ como significando, respectivamente, $A \diamond (B[\underline{t}/\underline{x}])$ e $\exists y(A[\underline{t}/\underline{x}])$ em vez de $(A \diamond B)[\underline{t}/\underline{x}]$ e $(\exists y A)[\underline{t}/\underline{x}]$.

4. Escrevemos $A \equiv B$ (respectivamente, $t \equiv q$) para significar que as fórmulas A e B (respectivamente, os termos t e q) são sintacticamente iguais.

5. Vamos usar o símbolo $\rightarrow$ para representar a implicação "dentro" de uma teoria (isto é, vai ser um símbolo da linguagem da teoria) e vamos usar o símbolo $\Rightarrow$ para denotar a implicação em meta-nível (isto é, vai ser um símbolo da "linguagem" auxiliar que usamos para discutir uma teoria). Damos usos análogos aos símbolos $\leftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$.

6. Denotamos as variáveis livres da fórmula A por $FV(A)$ e as variáveis que ocorrem no termo t por $FV(t)$ (FV vem do inglês *free variables*).

De seguida apresentamos sistemas de dedução formal para a lógica intuicionista e para a lógica clássica. Vamos usar três sistemas de dedução formal (cada um deles com duas versões), escolhendo caso a caso o que mais nos convier. Tal é legítimo porque os sistemas intuicionistas são equivalentes e os sistemas clássicos também são equivalentes. Os três sistemas são:

1. o sistema de dedução formal de Gödel (versões intuicionista e clássica);

2. a dedução natural (versões intuicionista e clássica);

3. o sistema de dedução formal de Shoenfield (só para lógica clássica, versões para uma linguagem baseada em $\neg$, $\vee$ e $\forall$ e para uma linguagem baseada em $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\forall$).

Regra geral, preferimos os sistemas de Gödel e de Shoenfield para demonstrações por indução no comprimento das derivações e a dedução natural para deduzir fórmulas.

Definição 2. Consideremos uma linguagem baseada em $\bot$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$ e $\exists$ (onde definimos $\neg A :\equiv A \to \bot$ e $A \leftrightarrow B :\equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$). O *sistema de dedução formal de Gödel para a lógica intuicionista* é constituído pelos seguintes axiomas lógicos e regras lógicas.

1. Os axiomas lógicos são:

   (a) os *axiomas da contracção* $A \vee A \to A$ e $A \to A \wedge A$;

   (b) os *axiomas do enfraquecimento* $A \to A \vee B$ e $A \wedge B \to A$;

   (c) os *axiomas da comutatividade* $A \vee B \to B \vee A$ e $A \wedge B \to B \wedge A$;

   (d) o axioma *ex falso quodlibet* $\bot \to A$;

   (e) $\forall x A \to A[t/x]$ e $A[t/x] \to \exists x A$ onde (em ambos os axiomas) t é um termo livre para x em A.

2. As regras lógicas são:

   (a) a regra *modus ponens* $\frac{A \quad A \to B}{B}$ e o *silogismo* $\frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}$;

   (b) a *regra da exportação* $\frac{A \wedge B \to C}{A \to (B \to C)}$ e a *regra da importação* $\frac{A \to (B \to C)}{A \wedge B \to C}$;

   (c) a *regra da expansão* $\frac{A \to B}{C \vee A \to C \vee B}$;

   (d) as *regras dos quantificadores* $\frac{B \to A}{B \to \forall x A}$ e $\frac{A \to B}{\exists x A \to B}$ onde (em ambas as regras) $x \notin FV(B)$.

Seja Γ um conjunto de fórmulas. Dizemos que uma fórmula A é *derivável* pelo sistema de dedução formal de Gödel para a lógica intuicionista a partir de Γ, e denotamos por $\Gamma \vdash_{i,G} A$, se e só se existe uma sequência de fórmulas $A_1, \ldots, A_n$, a que chamamos *derivação* de A, com $A_n = A$, tal que cada A_i é um axioma lógico ou $A_i \in \Gamma$ ou A_i resulta da aplicação de uma regra lógica a $A_{j_1}, \ldots, A_{j_k}$ com $j_1, \ldots, j_k < i$.

Vamos agora apresentar a dedução natural. Trata-se de um sistema de dedução formal que reproduz a nossa forma usual de raciocinar, pelo que é particularmente útil para derivarmos fórmulas. Neste sistema as derivações têm a forma de árvores, pelo que antes de apresentarmos o sistema indicamos a notação que vamos usar para as árvores.

Notacao 3. Vamos representar uma árvore como a da figura 1.1 por

$$\dfrac{C_1 \qquad \dfrac{\dfrac{A}{B_1} \quad B_2}{C_2} \qquad C_3}{D}.$$

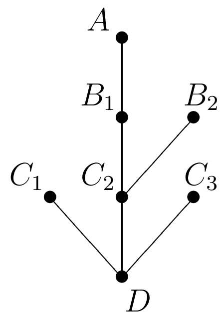

Figura 1.1: uma árvore.

Definição 4.

1. Consideremos uma linguagem baseada em $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$ e $\exists$ (onde definimos $\neg A :\equiv A \rightarrow \perp$ e $A \leftrightarrow B :\equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$). Chamamos *dedução natural para a lógica intuicionista* ao sistema de dedução formal constituído pelas regras lógicas expostas adiante para construir árvores D, a que chamamos *derivações*, cujos nodos são etiquetados por fórmulas. À fórmula que etiqueta o nodo inferior de D chamamos *conclusão* de D. O nome das regras está escrito à direita da linha horizontal das regras. Nesse nome, "E" significa "eliminação", "I" (isto é, "I") significa "introdução", "l" (isto é, "l") em índice significa "esquerda" (vem do inglês *left*) e "r" em índice significa "direita" (vem do inglês *right*). Por exemplo, o nome "$\wedge\mathsf{E}_\mathsf{l}$" lê-se "eliminação de $\wedge$ à esquerda" ou "$\wedge$-eliminação à esquerda".

2. Ao mesmo tempo que expomos as regras, definimos por indução no número de nodos de D os conjuntos de nodos $A(D)$ e $F(D)$. Dizemos que uma fórmula A é uma *hipótese aberta* (respectivamente, *fechada*) se e só se A é etiqueta de um nodo pertencente a $A(D)$ (respectivamente, $F(D)$).

3. Suponhamos que D é uma dedução.

   (a) Se quisermos por em evidência que A pode ser uma hipótese aberta de D (embora não tenha necessariamente de o ser), então podemos denotar D por
   $$\begin{array}{c}[A]\\ D\end{array}\ .$$

   (b) Se B for a conclusão de D, então podemos pôr em evidência este facto denotando D por
   $$\begin{array}{c}D\\ B\end{array}\ .$$

   (c) Nas condições das duas alíneas anteriores, podemos combinar as duas notações e denotar D por
   $$\begin{array}{c}[A]\\ D\\ B\end{array}\ .$$

4. As regras lógicas são as seguintes. Consideramos que a seguinte árvore D,
   $$\frac{}{A} \qquad \begin{array}{l}A(D) := \{A\}\\ F(D) := \emptyset\end{array}$$
   (isto é, uma árvore com um só vértice, e esse vértice tem etiqueta A) é uma derivação onde $A(D) = \{A\}$ e $F(D) = \emptyset$ (por $\{A\}$ entendemos o conjunto formado pelo nodo de D com etiqueta A).
   Suponhamos agora que temos derivações D_1, D_2 e D_3, para as quais já definimos os conjuntos $A(D_i)$ e $F(D_i)$. As seguintes árvores D são derivações.

$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \perp\end{array}}{A}\ \perp$	$A(D) := A(D_1)$ $F(D) := F(D_1)$
$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ A\end{array} \quad \begin{array}{c}D_2\\ B\end{array}}{A \wedge B}\ \wedge\mathsf{I}$	$A(D) := A(D_1) \cup A(D_2)$ $F(D) := F(D_1) \cup F(D_2)$
$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ A \wedge B\end{array}}{A}\ \wedge\mathsf{E_r}$	$A(D) := A(D_1)$ $F(D) := F(D_1)$
$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ A \wedge B\end{array}}{B}\ \wedge\mathsf{E_l}$	$A(D) := A(D_1)$ $F(D) := F(D_1)$

$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ D_1\\ B\end{matrix}}{A \to B}\,{\to}\mathsf{I}$	$A(D) := A(D_1) \setminus X$ $F(D) := F(D_1) \cup X$ $X \subseteq \{A\}$
Por $\{A\}$ entendemos o conjunto dos nodos de $A(D_1)$ etiquetados por A.	
$\dfrac{\begin{matrix}D_1\\ A \to B\end{matrix}\qquad\begin{matrix}D_2\\ A\end{matrix}}{B}\,{\to}\mathsf{E}$	$A(D) := A(D_1) \cup A(D_2)$ $F(D) := F(D_1) \cup F(D_2)$
$\dfrac{\begin{matrix}D_1\\ A\end{matrix}}{A \vee B}\,{\vee}\mathsf{I}_{\mathsf{r}}$	$A(D) := A(D_1)$ $F(D) := F(D_1)$
$\dfrac{\begin{matrix}D_1\\ B\end{matrix}}{A \vee B}\,{\vee}\mathsf{I}_{\mathsf{l}}$	$A(D) := A(D_1)$ $F(D) := F(D_1)$
$\dfrac{\begin{matrix}\\ D_1\\ A \vee B\end{matrix}\qquad\begin{matrix}[A]\\ D_2\\ C\end{matrix}\qquad\begin{matrix}[B]\\ D_3\\ C\end{matrix}}{C}\,{\vee}\mathsf{E}$	$A(D) := A(D_1) \cup [A(D_2) \setminus \{A\}] \cup [A(D_3) \setminus \{B\}]$ $F(D) := F(D_1) \cup F(D_2) \cup F(D_3) \cup \{A\} \cup \{B\}$
Por $\{A\}$ entendemos o conjunto dos nodos de $A(D_2)$ etiquetados por A. Por $\{B\}$ entendemos o conjunto dos nodos de $A(D_3)$ etiquetados por B.	
$\dfrac{\begin{matrix}D_1\\ A\end{matrix}}{\forall x A}\,\forall\mathsf{I}$	$A(D) := A(D_1)$ $F(D) := F(D_1)$
Exigimos que $A(D_1)$ não contenha nodos etiquetados por fórmulas das quais x seja variável livre.	
$\dfrac{\begin{matrix}D_1\\ \forall x A\end{matrix}}{A[t/x]}\,\forall\mathsf{E}$	$A(D) := A(D_1)$ $F(D) := F(D_1)$
Exigimos que o termo t esteja livre para a x em A.	
$\dfrac{\begin{matrix}D_1\\ A[t/x]\end{matrix}}{\exists x A}\,\exists\mathsf{I}$	$A(D) := A(D_1)$ $F(D) := F(D_1)$
Exigimos que o termo t esteja livre para a x em A.	
$\dfrac{\begin{matrix}\\ D_1\\ \exists x A\end{matrix}\qquad\begin{matrix}[A]\\ D_2\\ B\end{matrix}}{B}\,\exists\mathsf{E}$	$A(D) := A(D_1) \cup [A(D_2) \setminus \{A\}]$ $F(D) := F(D_1) \cup F(D_2) \cup \{A\}$
Exigimos que $x \notin FV(B)$ e que em $A(D_2) \setminus \{A\}$ não haja nodos etiquetados por fórmulas das quais x seja variável livre. Por $\{A\}$ entendemos o conjunto dos nodos de $A(D_2)$ etiquetados por A.	

5. Seja Γ um conjunto de fórmulas. Dizemos que uma fórmula A é *derivável* pela dedução natural para a lógica intuicionista a partir de Γ, e denotamos

por $\Gamma \vdash_{i,N} A$, se e só se existe uma dedução D com conclusão A e todas as fórmulas que são etiquetas de $A(D)$ pertencem a Γ.

6. Podemos adicionar novos axiomas à dedução natural considerando um axioma A como sendo uma dedução D que consiste numa árvore com um só vértice com etiqueta A e sem hipóteses abertas nem fechadas:

$$\frac{}{A} \qquad \begin{array}{l} A(D) := \emptyset \\ F(D) := \emptyset \end{array}$$

Observação 5. A regra $\to\mathsf{I}$ acima permite que apenas algumas das hipóteses abertas A deixem de ser abertas e passem a ser fechadas (mais precisamente, permite que apenas alguns nodos de $A(D_1)$ com etiqueta A não pertençam a $A(D)$ e pertençam a $F(D)$). Existe uma variante $\to\mathsf{I}'$ em que se exige $X = \{A\}$, isto é, "fecham-se" todas as hipóteses abertas A. A esta opção de "fechar" todas as hipóteses abertas chamamos *convenção da descarga completa* ("descarregar" significa "fechar").
A dedução natural com a regra $\to\mathsf{I}$ é equivalente à dedução natural com regra $\to\mathsf{I}'$, no sentido de que uma fórmula é derivável por uma dedução natural se e só se é derivável pela outra (ver [Troelstra e Schwichtenberg 1996], parágrafo 2.1.5).

Notacao 6. Frequentemente para indicarmos que vamos fazer a dedução

$$\frac{\forall x A(x)}{A(t)}$$

escrevemos que "pomos $x = t$".

Os dois sistemas de dedução formal anteriores são equivalentes no seguinte sentido.

Teorema 7 (equivalência entre os sistemas intuicionistas)**.** *Consideremos uma linguagem $\mathcal{L}$ baseada em $\bot$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$ e $\exists$. Para toda a fórmula A de $\mathcal{L}$ e para todo o conjunto Γ de fórmulas de $\mathcal{L}$, temos $\Gamma \vdash_{i,G} A \;\Leftrightarrow\; \Gamma \vdash_{i,N} A$.*

Demonstração. Ver [Troelstra 1973], capítulo I, subparágrafos de 1.1.3 a 1.1.11. $\square$

Graças a este equivalência, podemos dizer que uma fórmula é intuicionisticamente derivável sem especificar em qual dos sistemas de dedução formal para a lógica intuicionista é derivável.

Vamos agora estender os dois sistemas de dedução formal anteriores para a lógica intuicionista à lógica clássica.

Definição 8. Consideremos uma linguagem baseada em $\bot$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$ e $\exists$. Chamamos *sistema de dedução formal de Gödel para a lógica clássica* ao sistema de dedução formal de Gödel para a lógica intuicionista com a adição do seguinte axioma lógico: a *lei do terceiro excluído*

$$\mathsf{LEM}: \quad A \vee \neg A$$

(LEM vem do inglês *law of excluded middle*).
Definimos a noção de uma fórmula A ser *derivável* a partir de um conjunto Γ pelo sistema de dedução formal de Gödel para a lógica clássica, denotando por $\Gamma \vdash_{c,G} A$, de forma análoga a $\Gamma \vdash_{i,G} A$.

Definição 9. Consideremos uma linguagem baseada em $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$ e $\exists$. Chamamos *dedução natural para a lógica clássica* à dedução natural para a lógica intuicionista com a adição da seguinte regra lógica: se D_1 é uma dedução, então a seguinte árvore D é uma dedução:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg A]\\ D_1\\ \perp\end{matrix}}{A}\,\mathsf{RAA} \qquad \begin{array}{l} A(D) = A(D_1) \setminus \{\neg A\} \\ F(D) = F(D_1) \cup \{\neg A\} \end{array}$$

(RAA vem do latim *reductio ad absurdum*) onde por $\{\neg A\}$ entendemos o conjunto dos nodos de $A(D_1)$ etiquetados por $\neg A$.
Definimos a noção de uma fórmula A ser *derivável* a partir de um conjunto Γ pelo sistema pela dedução natural para a lógica clássica, denotando por $\Gamma \vdash_{c,N} A$, de forma análoga a $\Gamma \vdash_{i,N} A$.

Como em lógica clássica valem as equivalências

$$A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B), \qquad (A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B, \qquad \exists x A \leftrightarrow \neg \forall x \neg A,$$

basta, para a lógica clássica, considerarmos uma linguagem baseada em $\neg$, $\vee$ e $\forall$, onde os membros esquerdos destas equivalências são por definição os membros direitos. O sistema de dedução formal de Shoenfield é talhado especificamente para esta situação.

Definição 10. Consideremos uma linguagem baseada em $\neg$, $\vee$, e $\forall$ (onde definimos $A \wedge B :\equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$, $A \rightarrow B :\equiv \neg A \vee B$ e $\exists x A :\equiv \neg \forall x \neg A$). O *sistema de dedução formal de Shoenfield para a lógica clássica* é constituído pelos seguintes axiomas lógicos e regras lógicas.

1. Os axiomas lógicos são:
   (a) $\neg A \vee A$;
   (b) $\forall x A \rightarrow A[t/x]$ onde t é um termo livre para x em A.
2. As regras lógicas são:
   (a) $\frac{A}{B \vee A}$;
   (b) $\frac{A \vee A}{A}$;
   (c) $\frac{A \vee (B \vee C)}{(A \vee B) \vee C}$;

(d) $\frac{A \vee B \quad \neg A \vee C}{B \vee C}$;

(e) $\frac{A \vee B}{\forall x A \vee B}$ onde $x \notin FV(B)$.

Seja Γ um conjunto de fórmulas. Dizemos que uma fórmula A é *derivável* pelo sistema de dedução formal de Shoenfield para a lógica clássica a partir de Γ, e denotamos por $\Gamma \vdash_{c,S} A$, se e só se existe uma sequência de fórmulas $A_1, \dots, A_n$, a que chamamos *derivação* de A, com $A_n = A$, tal que cada A_i é um axioma lógico ou $A_i \in \Gamma$ ou A_i resulta da aplicação de uma regra lógica a $A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$ com $j_1, \dots, j_k < i$.

Apesar de $\neg$, $\vee$ e $\forall$ ser um sistema de símbolos lógicos completo para a lógica clássica, em algumas situações (por exemplo, quando estudarmos a tradução de Shoenfield) trará alguma simplicidade considerarmos também $\wedge$ como um símbolo lógico primitivo. Por esta razão, apresentamos de seguida uma modificação do sistema de Shoenfield para esta nova situação. Esta adaptação e a demonstração da redução da sua completude à do sistema de Shoenfield original devem-se a Fernando Ferreira.

A modificação do sistema de Shoenfield consiste em tomar $\wedge$ como símbolo primitivo e acrescentar axiomas para lidar com este novo símbolo. Para que tal modificação seja equivalente ao sistema original, é suficiente que no novo sistema derive-se $A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$. Portanto, uma solução era tomar $A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ como sendo um axioma do novo sistema. Verifica-se no entanto que é suficiente e mais elegante acrescentar os axiomas $A \wedge B \to A$, $A \wedge B \to B$ e $A \to (B \to A \wedge B)$.

Definição 11. Consideremos uma linguagem baseada em $\neg$, $\wedge$, $\vee$, e $\forall$. O *sistema de dedução formal de Shoenfield para a lógica clássica modificado* é constituído pelos seguintes axiomas lógicos e regras lógicas.

1. Os axiomas lógicos são:

   (a) $\neg A \vee A$;

   (b) $A \wedge B \to A$;

   (c) $A \wedge B \to B$;

   (d) $A \to (B \to A \wedge B)$;

   (e) $\forall x A \to A[t/x]$ onde t é um termo livre para x em A.

2. As regras lógicas são:

   (a) $\frac{A}{B \vee A}$;

   (b) $\frac{A \vee A}{A}$;

   (c) $\frac{A \vee (B \vee C)}{(A \vee B) \vee C}$;

   (d) $\frac{A \vee B \quad \neg A \vee C}{B \vee C}$;

(e) $\frac{A \vee B}{\forall x A \vee B}$ onde $x \notin FV(B)$.

Definimos a noção de uma fórmula A ser *derivável* a partir de um conjunto Γ pelo sistema de dedução formal de Shoenfield para a lógica clássica modificado, denotando por $\Gamma \vdash_{c,S_m} A$, de forma análoga a $\Gamma \vdash_{c,S} A$.

Como é desejável, os três sistemas para a lógica clássica são equivalentes entre si, pelo que podemos em cada situação usar o sistema mais conveniente.

Teorema 12 (equivalência entre os sistemas clássicos e completude). *O sistema de dedução formal de Gödel para a lógica clássica, a dedução natural para a lógica clássica, o sistema de dedução formal de Shoenfield para a lógica clássica e o sistema de dedução formal de Shoenfield para a lógica clássica modificado são completos (e correctos) para a lógica clássica. Consequentemente, para toda a fórmula A e para todo o conjunto Γ de fórmulas, temos*

$$\Gamma \vdash_{c,G} A \;\Leftrightarrow\; \Gamma \vdash_{c,N} A \;\Leftrightarrow\; \Gamma \vdash_{c,S} A \;\Leftrightarrow\; \Gamma \vdash_{c,S_m} A.$$

Demonstração.

Dedução natural Em [van Dalen 1989], capítulo 3, está demonstrado que a dedução natural para a lógica clássica é completa.

Sistema de dedução formal de Gödel A demonstração consiste essencialmente em provar que, na presença da lógica intuicionista, LEM e RAA são equivalentes. Usando LEM provamos RAA por

$$\dfrac{A \vee \neg A \quad [A] \quad \dfrac{\begin{matrix}[\neg A] \\ D \\ \bot\end{matrix}}{A}\,\bot}{A}\,\vee\mathsf{E},$$

e usando RAA provamos LEM por

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(A \vee \neg A)] \quad \dfrac{[A]}{A \vee \neg A}}{\bot}}{\neg A}\,\to\mathsf{I}}{A \vee \neg A}}{\dfrac{\bot}{A \vee \neg A}}\,\begin{matrix}\to\mathsf{E} \\ \mathsf{RAA}\end{matrix}.$$

Então o sistema de Gödel com LEM é equivalente (pelo teorema 7) à dedução natural com LEM que é equivalente à dedução natural com RAA.

Sistema de dedução formal de Shoenfield Em [Shoenfield 1967], secção 4.2, está demonstrado que o sistema de dedução formal de Shoenfield para a lógica clássica é completo.

Sistema de dedução formal de Shoenfield modificado Sejam S e $\mathsf{S_m}$, respectivamente, os sistemas de dedução formal de Shoenfield e de Shoenfield modificado. Seja C uma fórmula de uma linguagem baseada em $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\forall$ e denotemos por C' a fórmula obtida de C substituindo cada ocorrência de uma subfórmula da forma $A \wedge B$ por $\neg(\neg A \vee \neg B)$. Para ver que $\mathsf{S_m}$ é completo, já sabendo que S o é, basta ver que $\Gamma \vdash_{c,S_m} C' \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_{C,S_m} C$, porque então temos

$$\Gamma \vDash C \;\Rightarrow\; \Gamma \vDash C' \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_{c,S} C' \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_{c,S_m} C' \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_{c,S_m} C,$$

onde $\Gamma \models C$ significa que C é consequência semântica de Γ, e onde na penúltima implicação usámos o facto de as derivações por S serem também derivações por $\mathsf{S_m}$, uma vez que todos os axiomas e regras de S são também axiomas e regras de $\mathsf{S_m}$. Para ver que $\Gamma \vdash_{c,S_m} C' \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_{C,S_m} C$ basta verificar que em $\mathsf{S_m}$ derivamos $A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$. Tal como as definimos, as derivações são sequências $A_1, \ldots, A_n$, mas para serem mais legíveis vamos dar-lhes o aspecto de árvores (como as deduções da dedução natural).

1. Em $\mathsf{S_m}$ vale a regra $\frac{A \vee B}{B \vee A}$ porque temos a derivação

$$\frac{A \vee B \qquad \neg A \vee A}{B \vee A}.$$

2. Em $\mathsf{S_m}$ vale a regra $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$ porque temos a derivação

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A}{B \vee A}}{A \vee B}\;(1) \qquad \neg A \vee B}{B \vee B}}{B},$$

onde "(1)" assinala um passo onde usámos a alínea 1.

3. Em $\mathsf{S_m}$ vale a regra $\frac{(A \vee B) \vee C}{A \vee (B \vee C)}$ porque temos a derivação

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{(A \vee B) \vee C}{C \vee (A \vee B)}\;(1)}{(C \vee A) \vee B}}{B \vee (C \vee A)}\;(1)}{(B \vee C) \vee A}}{A \vee (B \vee C)}\;(1).$$

Recordemos que por definição também vale a regra recíproca $\frac{A \vee (B \vee C)}{(A \vee B) \vee C}$.

4. Em $\mathsf{S_m}$ vale a regra $\frac{A \vee B}{\neg\neg A \vee B}$ porque temos a derivação

$$\cfrac{\cfrac{A \vee B \qquad \cfrac{\neg\neg A \vee \neg A}{\neg A \vee \neg\neg A}\;(1)}{B \vee \neg\neg A}}{\neg\neg A \vee B}\;(1).$$

5. $\vdash_{c,S_m} A \to [B \to \neg(\neg A \vee \neg B)]$ porque temos a derivação

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\neg A \vee \neg B) \vee (\neg A \vee \neg B)}{(\neg A \vee \neg B) \vee \neg(\neg A \vee \neg B)}\,(1)}{\neg A \vee [\neg B \vee \neg(\neg A \vee \neg B)]}\,(3).$$

6. Em $\mathsf{S_m}$ vale a regra $\frac{A \to (B \to C) \quad A \to B}{A \to C}$ porque temos a derivação

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A \vee B}{B \vee \neg A}\,(1) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A \vee (\neg B \vee C)}{(\neg B \vee C) \vee \neg A}\,(1)}{\neg B \vee (C \vee \neg A)}\,(3)}{\neg A \vee (C \vee \neg A)}}{C \vee [\neg A \vee (C \vee \neg A)]}}{(C \vee \neg A) \vee (C \vee \neg A)}}{\dfrac{C \vee \neg A}{\neg A \vee C}\,(1)}.$$

7. $\vdash_{c,S_m} \neg(\neg A \vee \neg B) \to A$ porque temos a derivação

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A \vee A}{A \vee \neg A}\,(1)}{\neg B \vee (A \vee \neg A)}}{(A \vee \neg A) \vee \neg B}\,(1)}{A \vee (\neg A \vee \neg B)}\,(3)}{(\neg A \vee \neg B) \vee A}\,(1)}{\neg\neg(\neg A \vee \neg B) \vee A}\,(4).$$

8. $\vdash_{c,S_m} \neg(\neg A \vee \neg B) \to B$ porque temos a derivação

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg B \vee B}{\neg A \vee (\neg B \vee B)}}{(\neg A \vee \neg B) \vee B}}{\neg\neg(\neg A \vee \neg B) \vee B}\,(4).$$

9. Em $\mathsf{S_m}$ vale a regra $\frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}$ porque temos a derivação

$$\dfrac{\dfrac{\neg A \vee B}{B \vee \neg A}\,(1) \qquad \neg B \vee C}{\neg A \vee C}.$$

10. $\vdash_{c,S_m} A \wedge B \to \neg(\neg A \vee \neg B)$ porque temos a derivação

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B \to A \quad A \to [B \to \neg(\neg A \vee \neg B)]\ (5)}{A \wedge B \to [B \to \neg(\neg A \vee \neg B)]}\,(9) \qquad A \wedge B \to B}{A \wedge B \to \neg(\neg A \vee \neg B)}\,(6).$$

11. $\vdash_{c,S_m} \neg(\neg A \vee \neg B) \to A \wedge B$ porque temos a derivação

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\neg A \vee \neg B) \to A \ (7) \quad A \to (B \to A \wedge B)}{\neg(\neg A \vee \neg B) \to (B \to A \wedge B)}\,(9) \qquad \neg(\neg A \vee \neg B) \to B \ (8)}{\neg(\neg A \vee \neg B) \to A \wedge B}\,(6).$$

12. Em $\mathsf{S_m}$ vale a regra $\frac{A \quad B}{A \wedge B}$ porque temos a derivação

$$\dfrac{\dfrac{A \to (B \to A \wedge B) \quad A}{B \to (A \wedge B)}\,(2) \qquad B}{A \wedge B}\,(2).$$

Das alíneas 10 e 11 resulta que $\vdash_{c,S_m} A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ por aplicação da alínea 12. $\square$

No enunciado do teorema anterior não é relevante especificar a linguagem a que pertence a fórmula A porque, no contexto da lógica clássica, os símbolos lógicos $\perp$, $\neg$, $\wedge$, $\to$, $\exists$ tanto podem ser considerados como primitivos ou definidos por valerem as equivalências

$$\perp \leftrightarrow C_0 \wedge \neg C_0, \qquad \neg A \leftrightarrow (A \to \perp),$$
$$A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B), \qquad (A \to B) \leftrightarrow \neg A \vee B, \qquad \exists x A \leftrightarrow \neg \forall x \neg A,$$

onde C_0 é uma fórmula fixada (no contexto da aritmética, uma alternativa a definir $\perp :\equiv C_0 \wedge \neg C_0$ é definir $\perp :\equiv 0 = 1$).

A lógica clássica obtém-se da lógica intuicionista adicionando-lhe LEM ou RAA. Há ainda um terceiro princípio comum em matemática que quando adicionado à lógica intuicionista resulta na lógica clássica.

Definição 13. Chamamos *lei da dupla negação* a

$$\mathsf{LDN}: \quad \neg\neg A \to A$$

(LDN vem do inglês *law of double negation*).

Observação 14. Podemos demonstrar que qualquer um dos sistemas de dedução formal para a lógica intuicionista prova a equivalência entre LEM, LDN e RAA. A adição de qualquer um destes princípios a um dos sistemas de dedução formal para a lógica intuicionista resulta num sistema de dedução formal completo para a lógica clássica.

Nota histórica 15. Parece-nos que a origem do sistema de dedução formal de Gödel para a lógica intuicionista são os artigos [Gödel 1958] e a sua revisão [Gödel 1972], de Gödel. Com vista a verificar o teorema da correcção de D (que veremos adiante), Gödel sugere o sistema seguinte:

1. os axiomas são $A \to A \wedge A$, $A \wedge B \to A$, $A \wedge B \to B \wedge A$, os axiomas duais destes para $\vee$ e $\perp \to A$ (na verdade, Gödel escreve $0 = 1 \to A$);

2. as regras são (a) $\frac{A \quad A \to B}{B}$, (b) $\frac{A(x)}{A(t)}$, (c) $\frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}$, (d) $\frac{A \wedge B \to C}{A \to (B \to C)}$, (e) $\frac{A \to (B \to C)}{A \wedge B \to C}$, (f) $\frac{A \to B}{A \to \forall x B}$, (g) $\frac{A \to \forall x B}{A \to B}$, (h) $\frac{A \to C \quad B \to C}{A \vee B \to C}$, (i) $\frac{A \to B}{\exists x A \to B}$ e (j) $\frac{\exists x A \to B}{A \to B}$ (onde em algumas regras faz restrições sobre x ser variável livre).

Comparativamente com o sistema da definição 2, o sistema original de Gödel tem a mais as regras (g) e (j), tem a regra da (h) em vez da regra da expansão $\frac{A \to B}{C \vee A \to C \vee B}$ (as duas são equivalentes na presença das restantes regras e axiomas) e tem a regra (b) em vez do axioma $\forall x A(x) \to A(t)$. Parece que no sistema original de Gödel falta o axioma $A(t) \to \exists x A(x)$, mas ele é derivável: dos axiomas $\exists x A(x) \to \exists x A(x) \wedge \exists x A(x)$ e $\exists x A(x) \wedge \exists x A(x) \to \exists x A(x)$ por (c) vem $\exists x A(x) \to \exists x A(x)$, donde por (j) vem $A(x) \to \exists x A(x)$, e daqui por (b) vem $[A(x) \to \exists x A(x)][t/x] \equiv A(t) \to \exists x A(x)$.

Nas notas biográficas 79 e 112 podemos encontrar breves biografias de Gödel e Shoenfield, respectivamente.

Nota histórica 16. A dedução natural surgiu devido ao descontentamento com os anteriores sistemas de dedução formal, que operavam de forma diferente da que usamos para raciocinar, tornando frequentemente difícil derivar fórmulas. Stanaslaw Jaśkowski e Gerhard Gentzen, simultânea e independentemente, conceberam sistemas de dedução mais naturais, que descreveram em artigos de 1935. Acabou por ser o sistema de Gentzen a vingar.

A origem do nome *dedução natural* para o sistema de dedução formal de Gentzen deve-se à sua descrição desse sistema como "cálculo de dedução natural" no seu artigo [Gentzen 1935]:

> «Primeiro eu queria construir um formalismo que se aproximasse o mais possível do raciocínio real. Então surgiu um "cálculo de dedução natural".»

Gentzen procurava uma demonstração da consistência da teoria dos números. Conseguiu-a usando a dedução natural, mas descontente com a complexidade da demonstração, apresentou uma nova demonstração em 1938 usando outro sistema de dedução formal chamado *cálculo de sequentes*.

Nota biográfica 17. Gerhard Gentzen (1909–1945) foi um lógico alemão particularmente conhecido pelos seus sistemas de dedução formal (a dedução natural e o cálculo de sequentes), pelo seu teorema da eliminação do corte e pelas suas demonstrações da consistência dos axiomas de Peano.

Gentzen mudou cinco vezes de universidade durante os seus estudos de matemática. Começou na Universidade de Greifswald em 1929, mas mudou-se para a Universidade de Göttingen no ano seguinte. Novamente um ano depois mudou de universidade, desta vez para a Universidade de Munique. Ainda ficou menos tempo nesta, mudando-se para a Universidade de Berlim. Finalmente, regressa a Göttingen, onde se doutorou. É aí que vai trabalhar até 1943 (embora tenha prestado serviço militar entre 1939 e 1941).

Durante a ocupação alemã de Praga, Gentzen torna-se professor na Universidade Alemã de Praga. Na sequência da revolta popular de Praga contra a ocupação, Gentzen é preso (juntamente com mais pessoal da universidade) e quatro dias depois, com a chegada do exército russo, é colocado num campo de concentração. Ocupa o tempo a pensar numa demonstração da consistência da análise e morre à fome três meses depois.

Nota histórica 18. Parece-nos que o sistema de dedução formal de Shoenfield surge pela primeira vez em [Shoenfield 1967]. Shoenfield começa por considerar, no capítulo 2, uma linguagem baseada em $\neg$, $\vee$ e $\exists$, e um sistema de dedução formal com (entre outros) o axioma $A(t) \to \exists x A(x)$ e a regra $\frac{A \to B}{\exists x A \to B}$ (com $x \notin FV(B)$). No capítulo 8, quando vai apresentar uma demonstração da consistência da aritmética de Peano, muda para uma linguagem baseada em $\neg$, $\vee$ e $\forall$, pelo que substitui o axioma e a regra pelos seus homólogos universais: $\forall x A(x) \to A(t)$ e $\frac{A \vee B}{\forall x A \vee B}$ (com $x \notin FV(B)$).

1.2 Tipos finitos

Nesta secção vamos definir a noção de *tipo finito*. Informalmente, o tipo de um número natural é 0, o tipo de uma função pertencente a $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ é 00, o de uma função pertencente a $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$ é (00)0, etc. Mais tarde consideraremos que cada termo tem um tipo associado, pelo que cada termo é encarado como representando um elemento de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ou $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$, etc.

Definição 19. Fixemos um alfabeto $\{(,),0,\to\}$. Definimos o *conjunto de todos os tipos finitos* $\mathbb{T}$, cujos elementos são palavras sobre alfabeto fixado aos quais chamamos *tipos finitos* ou simplesmente *tipos*, por indução pelas seguintes condições:

1. $0 \in \mathbb{T}$;

2. $\rho, \tau \in \mathbb{T} \;\Rightarrow\; (\rho \to \tau) \in \mathbb{T}$.

Em vez da palavra $(\rho \to \tau)$ podíamos ter considerado a palavra $\tau(\rho)$ ou a palavra $(\tau\rho)$ (notemos a inversão da ordem de ρ e τ).

Pode ser útil ter a seguinte interpretação em mente: pensamos num objecto de tipo 0 como sendo um número natural e pensamos num objecto de tipo $\rho \to \tau$ como sendo uma função (total) do conjunto dos objectos de tipo ρ para o conjunto dos objecto de tipo τ. De outra forma, pensamos no tipo 0 como sendo o conjunto dos números naturais e pensamos no tipo $\rho \to \tau$ como sendo o conjunto das funções (totais) do conjunto ρ para o conjunto τ.

Usando esta interpretação, podemos dar uma motivação para as notações $\rho \to \tau$ e $\tau\rho$. Denotemos tanto por $A \to B$ como por B^A o conjunto das aplicações de um conjunto A para um conjunto B. Então pensando em ρ e τ como sendo conjuntos, temos que $\rho \to \tau$ é $A \to B$ com $A = \rho$ e $B = \tau$, isto é, $\tau\rho$ é B^A com $A = \rho$ e $B = \tau$ (talvez seja mais sugestivo escrever $\tau\rho$ na forma τ^ρ para se assemelhar mais a B^A).

Notacao 20.

1. Quando não houver ambiguidade, dispensamos parênteses. Por exemplo, escrevemos $0(00)$ em vez de $\big(0(00)\big)$.
2. Sejam $\rho_1, \ldots, \rho_k$ tipos. Abreviamos
$$\rho_1 \to \Big(\rho_2 \to \big(\rho_3 \to \cdots \to (\rho_{k-1} \to \rho_k)\cdots\big)\Big) \tag{1.1}$$
por $\rho_1 \to \rho_2 \to \rho_3 \to \cdots \to \rho_{k-1} \to \rho_k$ (isto é, quando usamos a notação com setas, associamos à direita).
Abreviamos
$$\Big(\big(\cdots(\rho_k\rho_{k-1})\cdots\rho_3\big)\rho_2\Big)\rho_1 \tag{1.2}$$
por $\rho_k\rho_{k-1}\cdots\rho_3\rho_2\rho_1$ (isto é, quando usamos a notação sem setas, associamos à esquerda).
Estas duas regras de associação não estão em contradição porque em (1.1) escrevemos os tipos $\rho_1, \ldots, \rho_k$ por uma ordem e em (1.2) escrevemos pela ordem inversa, o que explica a inversão da regra de associação.
3. Abreviamos um k-uplo $\rho_1, \ldots, \rho_k$ (eventualmente vazio) de tipos por $\underline{\rho}$ e definimos $\underline{\rho}^t := \rho_k, \ldots, \rho_1$ (isto é, $\underline{\rho}^t$ é o uplo $\underline{\rho}$ pela ordem inversa).
4. Dados dois uplos $\underline{\rho} = \rho_1, \ldots, \rho_n$ e $\underline{\tau} = \tau_1, \ldots, \tau_k$ de tipos, definimos
$$\underline{\rho}\,\underline{\tau} := \rho_1\tau_1\cdots\tau_k, \ldots, \rho_n\tau_1\cdots\tau_k.$$
5. Sejam $\underline{\rho}^{(1)}, \ldots, \underline{\rho}^{(k)}$ uplos de tipos. Abreviamos
$$\Big(\big(\cdots(\underline{\rho}^{(k)}\underline{\rho}^{(k-1)})\cdots\underline{\rho}^{(3)}\big)\underline{\rho}^{(2)}\Big)\underline{\rho}^{(1)}$$
por $\underline{\rho}^{(k)}\underline{\rho}^{(k-1)}\cdots\underline{\rho}^{(3)}\underline{\rho}^{(2)}\underline{\rho}^{(1)}$ (isto é, associamos à esquerda).

Nota histórica 21. A noção de tipo finito surge no artigo [Gödel 1958] de Gödel:

> «[...] a noção de "função computável de tipo t" é definida da seguinte forma:
>
> (1) as funções computáveis de tipo 0 são os números naturais;

(2) se as noções de "função computável de tipo t_0","função computável de tipo t_1",...,"função computável de tipo t_k" (com $k \geq 1$) já foram definidas, então uma função computável de tipo $(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ é definida como uma operação [...] que a cada k-uplo de funções computáveis de tipos $t_1, \ldots, t_k$ associa uma função computável de tipo t_0.»

Usando a noção de tipos finitos, Gödel constrói uma teoria tipada T (isto é, onde cada termo tem um tipo), conhecida como *teoria* T *de Gödel*, que é essencialmente HA_0^ω sem quantificadores, e reduz a consistência de PA (que é essencialmente PA_0^ω não tipado) à consistência de T. (Falaremos mais dessa demonstração de Gödel na nota histórica 78.)

1.3 Aritméticas de Heyting e de Peano

Nesta secção definimos as duas teorias aritméticas que vamos considerar durante a primeira parte da tese: a *aritmética de Peano* e a sua homóloga intuicionista, a *aritmética de Heyting*. Vão ser *teorias tipadas*, isto é, nas quais cada termo tem associado um tipo finito. Iremos fazer algumas considerações acerca da forma como a versão que adoptámos destas aritméticas trata a igualdade.

Aproveitamos para provar alguns resultados básicos relacionados com variações e generalizações dos axiomas e regras destas duas aritméticas e com alguns axiomas que parecem estar em falta, mas na verdade são consequência dos restantes.

Definição 22. A *aritmética de Heyting em todos os tipos finitos com tratamento minimal da igualdade*, denotada por HA_0^ω (vem do inglês *Heyting arithmetic*, 0 indica o tratamento minimal da igualdade e ω todos os tipos finitos), é formada pela seguinte linguagem e pelo seguinte sistema de dedução formal.

Linguagem

1. Os símbolos lógicos são $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$, $\exists$ (onde, como habitualmente, definimos $\neg A :\equiv A \to \perp$ e $A \leftrightarrow B :\equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$).
   Para cada tipo ρ, a linguagem tem um conjunto numerável de variáveis $x_1^\rho, x_2^\rho, x_3^\rho, \ldots$ de tipo ρ.
   Os símbolos não lógicos são o símbolo relacional binário $=_0$, entre termos (a definir a seguir) de tipo 0, e as constantes seguintes que dividimos em dois conjuntos: *constantes lógicas* e *constantes aritméticas*.
   (a) As constantes lógicas são, para todos os tipos ρ, τ e δ, $\Pi_{\rho,\tau}$ de tipo $\rho\tau\rho$ chamado *projector*, e $\Sigma_{\delta,\rho,\tau}$ de tipo $\tau\delta(\rho\delta)(\tau\rho\delta)$ chamado *combinador*.
   (b) As constantes aritméticas são, para todos os tipos $\underline{\rho} = \rho_1, \ldots, \rho_k$, 0 de tipo 0 chamado *zero*, S de tipo 00 chamado *sucessor* e um uplo $\underline{R}_{\underline{\rho}} = (R_1)_{\underline{\rho}}, \ldots, (R_k)_{\underline{\rho}}$, onde cada R_i tem tipo $\rho_i(\rho_k 0 \underline{\rho}^t) \cdots (\rho_1 0 \underline{\rho}^t)\underline{\rho}^t 0$ (isto é, $\underline{R}_{\underline{\rho}}$ tem tipo $\underline{\rho}(\underline{\rho}^t 0 \underline{\rho}^t)\underline{\rho}^t 0$) e é chamado um *recursor*.

2. Os *termos* de tipo ρ são as variáveis de tipo ρ, as constantes de tipo ρ e as palavras da forma tq onde t é um termo do tipo $\rho\tau$ e q é um termo do tipo τ.

3. As *fórmulas atómicas* são $\perp$ e as palavras da forma $t =_0 q$ onde t e q são termos do tipo 0.
   As *fórmulas* são as fórmulas atómicas e as palavras da forma $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $\forall x^\rho A$ e $\exists x^\rho A$, onde A e B são fórmulas e x^ρ é uma variável do tipo ρ.

<u>Notação</u> Antes de prosseguirmos a definição, precisamos de estabelecer alguma notação.

1. Sejam $t_1, \ldots, t_k$ termos de HA_0^ω. Abreviamos
$$\Big(\cdots \big((t_1 t_2) t_3 \big) \cdots \Big) t_k$$
por $t_1 t_2 t_3 \cdots t_k$ (isto é, associamos $t_1 t_2 t_3 \cdots t_k$ à esquerda).

2. Sejam $\underline{\rho} = \rho_1, \ldots, \rho_k$ e $\underline{\tau} = \tau_1, \ldots, \tau_n$ uplos de tipos e $\underline{t} = t_1, \ldots, t_k$ e $\underline{q} = q_1, \ldots, q_n$ uplos de termos de HA_0^ω de tipos $\underline{\rho}\underline{\tau}^t$ e $\underline{\tau}$, respectivamente. Abreviamos o uplo $t_1 q_1 \cdots q_n, \ldots, t_k q_1 \cdots q_n$ de tipo $\underline{\rho}$ por $\underline{t}\,\underline{q}$.

3. Sejam $\underline{t}^{(1)}, \ldots, \underline{t}^{(k)}$ uplos de termos de HA_0^ω. Abreviamos
$$\Big(\cdots \big((\underline{t}^{(1)} \underline{t}^{(2)}) \underline{t}^{(3)} \big) \cdots \Big) \underline{t}^{(k)}$$
por $\underline{t}^{(1)} \underline{t}^{(2)} \underline{t}^{(3)} \cdots \underline{t}^{(k)}$ (isto é, associamos $\underline{t}^{(1)} \underline{t}^{(2)} \underline{t}^{(3)} \cdots \underline{t}^{(k)}$ à esquerda).

<u>Sistema de dedução formal</u>

1. Os axiomas lógicos e regras lógicas são os da lógica intuicionista (ver definições 2 e 4).

2. Os axiomas não lógicos, a que chamamos *axiomas aritméticos*, são (onde A_{at} é uma fórmula atómica):

   (a) os axiomas de $\Pi_{\rho,\tau}$:
   $$\Pi : \quad A_{at}[\Pi_{\rho,\tau} x^\rho y^\tau / w^\rho] \leftrightarrow A_{at}[x/w];$$

   (b) os axiomas de $\Sigma_{\delta,\rho,\tau}$:
   $$\Sigma : \quad A_{at}[\Sigma_{\delta,\rho,\tau} x^{\tau\rho\delta} y^{\rho\delta} z^\delta / w^\tau] \leftrightarrow A_{at}[xz(yz)/w];$$

   (c) os axiomas de $\underline{R}_{\underline{\rho}}$:
   $$\underline{R} : \quad \begin{cases} A_{at}[\underline{R}_{\underline{\rho}} 0 \underline{y}^{\underline{\rho}} \underline{z}^{\underline{\rho}0\underline{\rho}^t} / \underline{w}^{\underline{\rho}}] & \leftrightarrow \quad A_{at}[\underline{y}/\underline{w}] \\ A_{at}[\underline{R}_{\underline{\rho}}(Sx^0) \underline{y}^{\underline{\rho}} \underline{z}^{\underline{\rho}0\underline{\rho}^t} / \underline{w}^{\underline{\rho}}] & \leftrightarrow \quad A_{at}[\underline{z}(\underline{R}_{\underline{\rho}} x \underline{y}\,\underline{z}) x / \underline{w}] \end{cases},$$
   onde $\underline{\rho} = \rho_1, \ldots, \rho_k$ é um uplo de termos e $\underline{y}^{\underline{\rho}} = y_1^{\rho_1}, \ldots, y_k^{\rho_k}$ e $\underline{z}^{\underline{\rho}0\underline{\rho}^t} = z_1^{\rho_1 0 \underline{\rho}^t}, \ldots, z_k^{\rho_k 0 \underline{\rho}^t}$ são uplos de variáveis;

(d) os axiomas de $=_0$: $x =_0 x$ e $x =_0 y \wedge A_{at}[x/w^0] \to A_{at}[y/w]$;

(e) os axiomas de S: $Sx =_0 Sy \to x =_0 y$ e $Sx \neq_0 0$;

(f) o *axioma de indução*:

$$\mathsf{IA}: \quad A(0) \wedge \forall x^0[A(x) \to A(Sx)] \to \forall x^0 A(x)$$

(IA vem do inglês *induction axiom*) onde $A(x^0)$ é uma fórmula arbitrária.

Definição 23. Definimos a *aritmética de Peano em todos os tipos finitos com tratamento minimal da igualdade*, denotada por PA_0^ω (do inglês *Peano arithmetic*), como sendo $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{LEM}$.

Por vezes omitimos a especificação dos índices superiores ρ indicativos dos tipos dos termos t^ρ para simplificar a escrita. Se o fizermos, quando escrevermos tq subentendemos que os termos t e q têm tipos compatíveis (isto é, se q tiver tipo τ, então t tem tipo da forma $\rho\tau$). Quando escrevemos $A[t/x]$ assumimos que o termo t e a variável x têm o mesmo tipo.

Adoptando a definição usual de chamar conjunto das variáveis (livres) de um termo t de HA_0^ω, denotado por $FV(t)$, ao conjunto das variáveis que nele ocorrem, temos que se $t^{\rho\tau}$ e q^τ são termos de HA_0^ω, então $FV(tq) = FV(t) \cup FV(q)$. Analogamente, adoptando a ideia usual de substituição de variáveis por termos, temos que se $t^{\rho\tau}$, q^τ e $\underline{r}^{\underline{\sigma}}$ são termos de HA_0^ω e $\underline{x}^{\underline{\sigma}}$ são variáveis, então $(tq)[\underline{r}/\underline{x}] \equiv (t[\underline{r}/\underline{x}])(q[\underline{r}/\underline{x}])$.

Informalmente, os axiomas Π, Σ e $\underline{R}$ dizem que $\Pi xy = x$, $\Sigma xyz = xz(yz)$ e $\underline{R}0\underline{y}\underline{z} = \underline{y}$, $\underline{R}(Sx)\underline{y}\underline{z} = z(\underline{R}x\underline{y}\underline{z})x$. Com efeito, existem mesmos versões da aritmética de Heyting, com um tratamento da igualdade dito por *extensionalidade*, em que (i) definimos uma igualdade entre termos de tipo $\rho = 0\rho_k \cdots \rho_1$ (todo o tipo ρ é desta forma) por $t^\rho =_\rho q^\rho :\equiv \forall x_1^{\rho_1}, \ldots, x_k^{\rho_k}(tx_1 \cdots x_k =_0 qx_1 \cdots x_k)$, (ii) damos os axiomas Π, Σ e $\underline{R}$ como igualdades de tipo ρ e (iii) adoptamos um *axioma* ou uma *regra da extensionalidade* que permite derivar os axiomas Π, Σ e $\underline{R}$ (ver, por exemplo, [Kohlenbach 2007], secção 3.3).

Observação 24. Temos

$$\begin{aligned}
\mathsf{HA}_0^\omega &\vdash \Pi_{0,\tau} x^0 y^\tau =_0 x,\\
\mathsf{HA}_0^\omega &\vdash \Sigma_{\delta,\rho,0} x^{0\rho\delta} y^{\rho\delta} z^\delta =_0 xz(yz),\\
\mathsf{HA}_0^\omega &\vdash R_0 0 y^0 z^{000} =_0 y,\\
\mathsf{HA}_0^\omega &\vdash R_0(Sx^0) y^0 z^{000} =_0 z(R_0 xyz)x.
\end{aligned}$$

Por exemplo, para verificar $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \Pi_{0,\tau} x^0 y^\tau =_0 x$, consideramos $A_{at}(w^0) :\equiv w =_0 x$. Por Π vem

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A_{at}(\Pi_{0,\tau} x^0 y^\tau) \leftrightarrow A_{at}(x),$$

isto é,

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \Pi_{0,\tau} x^0 y^\tau =_0 x \leftrightarrow x =_0 x.$$

Como $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x =_0 x$, segue-se $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \Pi_{0,\tau} x^0 y^\tau =_0 x$. Analogamente para os restantes resultados.

Para o estudo que vamos realizar, só nos interessa, por exemplo, de $A[\Pi xy/w]$ podermos concluir $A[x/w]$. Com um tratamento da igualdade por extensionalidade, tal seria feito em dois passos: (i) evocávamos $\Pi xy =_\rho x$ e (ii) usávamos o axioma ou regra da extensionalidade para de $A[\Pi xy/w]$ (e de (i)) concluir $A[x/w]$. Tal seria um processo indirecto porque pelo meio envolvida a igualdade de tipo ρ. O tratamento da igualdade e dos axiomas Π, Σ e $\underline{R}$ que adoptámos, dito *minimal*, é mais directo porque permite tirar a mesma conclusão mas num único passo, pelo que nos parece mais elegante.

As constantes Π e Σ podem inicialmente parecer objectos estranhos. A presença destas constantes torna-se mais natural quando, ao demonstrarmos o teorema da completude combinatorial, notarmos como elas são fundamentais e especialmente talhadas para construir termos que desempenham o papel de funções dentro de HA_0^ω. Já as constantes $\underline{R}$ são mais fáceis de interpretar: usando-as podemos, dentro de HA_0^ω, definir termos por recursão. Por exemplo, se $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ for uma função que já conseguimos representar dentro de HA_0^ω por um termo t, então a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por recursão,

$$\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(n+1) &= g\big(f(n), n\big) \end{cases}, \tag{1.3}$$

pode ser representada dentro de HA_0^ω pelo termo $Rn0t$. Com efeito, temos $A[R00t/w] \leftrightarrow A[0/w]$ e $A[R(Sn)0t/w] \leftrightarrow A[t(Rn0t)n/w]$, o que informalmente pensamos como significando

$$\begin{cases} R00t &= 0 \\ R(Sn)0t &= t(Rn0t)n \end{cases}. \tag{1.4}$$

Comparando (1.3) com (1.4) pensando em $Rn0t$ como sendo $f(n)$ e em t como sendo g, vemos que o termo $Rn0t$ está a ser definido por recursão da mesma forma que f. Mais geralmente, num termo $Rxyz$, o x faz as vezes da variável sobre a qual se faz recursão, o y é o valor inicial (o valor do termo quando $x = 0$) e o z é a função que dá o valor de $R(Sx)yz$ à custa do valor de $Rxyz$ e de x. Consideramos uplos $\underline{R}$ de recursores em vez de um só recursor R para podermos facilmente fazer recursões simultâneas.

Nos capítulos seguintes vai ser por vezes mais fácil fazer demonstrações por indução no comprimento das derivações usando uma regra de indução em vez do axioma de indução.

Proposição 25. *Se em* HA_0^ω *substituirmos* IA *pela* regra de indução

$$\mathsf{IR}: \quad \frac{A(0) \quad A(x) \to A(Sx)}{A(x^0)},$$

(IR *vem do inglês* induction rule*), isto é,* $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(0), A(x) \to A(Sx) \;\Rightarrow\; \mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x)$*, então obtemos uma teoria equivalente a* HA_0^ω*. Analogamente para* PA_0^ω*.*

Demonstração. Sejam $\mathsf{HA}_0^{\omega\prime}$ a teoria obtida de HA_0^{ω} substituindo IA por IR e $A(x^0)$ uma fórmula qualquer de HA_0^{ω}.

$\underline{\mathsf{HA}_0^{\omega} \Rightarrow \mathsf{HA}_0^{\omega\prime}}$ Suponhamos que $\mathsf{HA}_0^{\omega} \vdash A(0)$ e $\mathsf{HA}_0^{\omega} \vdash A(x) \to A(Sx)$. Então $\mathsf{HA}_0^{\omega} \vdash \forall x[A(x) \to A(Sx)]$. Vem $\mathsf{HA}_0^{\omega} \vdash A(0) \wedge \forall x[A(x) \to A(Sx)]$. Por IA aplicando *modus ponens* concluímos $\mathsf{HA}_0^{\omega} \vdash \forall x A(x)$, logo $\mathsf{HA}_0^{\omega} \vdash A(x)$.

$\underline{\mathsf{HA}_0^{\omega\prime} \Rightarrow \mathsf{HA}_0^{\omega}}$ Seja

$$B(x) :\equiv A(0) \wedge \forall x[A(x) \to A(Sx)] \to A(x).$$

Temos

$$\begin{array}{rcl} B(0) & \equiv & A(0) \wedge \forall x[A(x) \to A(Sx)] \to A(0), \\ B(x) \to B(Sx) & \equiv & \big[A(0) \wedge \forall x\big(A(x) \to A(Sx)\big) \to A(x)\big] \to \\ & & \big[A(0) \wedge \forall x\big(A(x) \to A(Sx)\big) \to A(Sx)\big]. \end{array}$$

É fácil provar $\mathsf{HA}_0^{\omega} \vdash B(0)$: basta supor o antecedente de $B(0)$ e daí concluir $A(0)$. Verificamos $\mathsf{HA}_0^{\omega} \vdash B(x) \to B(Sx)$ da seguinte forma: supomos $B(x)$ e o antecedente de $B(Sx)$, donde concluímos $A(x)$; como pelo antecedente de $B(Sx)$ temos $A(x) \to A(Sx)$, concluímos $A(Sx)$. Por IR vem $\mathsf{HA}_0^{\omega\prime} \vdash B(x)$, isto é, $\mathsf{HA}_0^{\omega\prime} \vdash \forall x B(x)$ donde, atendendo a que x não está livre no antecedente de $B(x)$ e sabendo que intuicionisticamente temos $\forall y(C \to D) \to (C \to \forall y D)$ se $y \notin FV(C)$, vem

$$\mathsf{HA}_0^{\omega\prime} \vdash A(0) \wedge \forall x[A(x) \to A(Sx)] \to \forall x A(x). \qquad \square$$

A definição de HA_0^{ω} exige que $=_0$ seja reflexiva. Parece no entanto estarem em falta as propriedades simétrica e transitiva. A proposição seguinte diz-nos que estas propriedades são deriváveis em HA_0^{ω}.

Proposição 26. *Temos:*

1. $\mathsf{HA}_0^{\omega} \vdash x =_0 y \to y =_0 x$;

2. $\mathsf{HA}_0^{\omega} \vdash x =_0 y \wedge y =_0 z \to x =_0 z$.

Demonstração.

1. Suponhamos $x =_0 y$. Seja $A_{at}(w) :\equiv w =_0 x$ (é uma fórmula atómica). Temos $A_{at}(x)$. De $x =_0 y$ e $A_{at}(x)$ vem $A_{at}(y)$, isto é, $y =_0 x$.

2. Suponhamos $x =_0 y$ e $y =_0 z$. Seja $A_{at}(w) :\equiv w =_0 z$. Temos $y =_0 x$ (pela alínea 1) e $A_{at}(y)$, logo temos $A_{at}(x)$, isto é, $x =_0 z$. $\square$

Um dos axiomas de HA_0^{ω} diz que se $x =_0 y$, então podemos numa fórmula atómica $A_{at}(x)$ substituir x por y. Vamos generalizar este facto a fórmulas arbitrárias.

Proposição 27. *Para toda a fórmula $A(z^0)$ de HA_0^ω e para todas as variáveis x^0 e y^0 que estejam livres para z em A, temos*

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x =_0 y \wedge A(x) \to A(y).$$

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução na complexidade das fórmulas.

<u>Fórmulas atómicas</u> Este caso é um axioma.

$\underline{A \wedge B}$ Por hipótese de indução, temos

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x =_0 y \wedge A(x) \to A(y), \tag{1.5}$$
$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x =_0 y \wedge B(x) \to B(y). \tag{1.6}$$

Suponhamos $x =_0 y$ e $A(x) \wedge B(x)$ e provemos $A(y) \wedge B(y)$. Vem $A(y)$ e $B(y)$, logo $A(y) \wedge B(y)$.

$\underline{A \vee B}$ Por hipótese de indução, temos (1.5) e (1.6). Suponhamos $x =_0 y$ e $A(x) \vee B(x)$ e provemos $A(y) \vee B(y)$. De $A(x) \to A(y)$ e de $B(x) \to B(y)$ vem $A(x) \to A(y) \vee B(y)$ e $B(x) \to A(y) \vee B(y)$, logo por $\vee\mathsf{E}$ vem $A(y) \vee B(y)$.

$\underline{A \to B}$ Por hipótese de indução, temos

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash y =_0 x \wedge A(y) \to A(x),$$

e temos (1.6). Suponhamos $x =_0 y$ e $A(x) \to B(x)$ e provemos $A(y) \to B(y)$. Temos $y =_0 x$. Então temos $A(y) \to A(x)$, $A(x) \to B(x)$ e $B(x) \to B(y)$, logo temos $A(y) \to B(y)$.

$\underline{\forall w A}$ Por hipótese de indução, temos (1.5). Suponhamos $x =_0 y$ e $(\forall w A)[x/z]$ e provemos $(\forall w A)[y/z]$. Se $z \equiv w$, então o resultado é óbvio porque $(\forall w A)[x/z] \equiv (\forall w A)[y/z]$. Suponhamos $z \not\equiv w$. Então $(\forall w A)[x/z] \equiv \forall w A(x)$. Temos $A(x)$, logo temos $A(y)$. De $A(y)$ vem $\forall w A(y)$ (porque w não é variável livre das hipóteses abertas $x =_0 y$ e $\forall w A(x)$, pois $w \not\equiv x, y$, uma vez que por hipótese x e y estão livres para z em $\forall w A$), isto é, $(\forall w A)[y/z]$.

$\underline{\exists w A}$ Por hipótese de indução, temos (1.5). Suponhamos $x =_0 y$ e $(\exists w A)[x/z]$ e provemos $(\exists w A)[y/z]$. Tal como na alínea anterior, podemos supor $z \not\equiv w$, logo $(\exists w A)[x/z] \equiv \exists w A(x)$. De $x =_0 y$ vem $A(x) \to A(y)$. Então de $\exists w A(x)$ vem por $\exists\mathsf{E}$ (que podemos usar porque w não ocorre livre na hipótese aberta $x =_0 y$ pela mesma razão da alínea anterior) $\exists w A(y) \equiv (\exists w A)[y/z]$. □

Os axiomas para Σ, Π e $\underline{R}$ apenas são postulados para fórmulas atómicas. No entanto, eles valem para fórmulas arbitrárias. Tal é consequência do seguinte lema.

Lema 28. *Sejam $\underline{t} = t_1, \ldots, t_n$ e $\underline{q} = q_1, \ldots, q_n$ uplos de termos de HA_0^ω. Se para toda a fórmula atómica A_{at} de HA_0^ω temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A_{at}[\underline{t}/\underline{x}] \leftrightarrow A_{at}[\underline{q}/\underline{x}]$, então para toda a fórmula A de HA_0^ω temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A[\underline{t}/\underline{x}] \leftrightarrow A[\underline{q}/\underline{x}]$.*

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução na complexidade das fórmulas.

<u>Fórmulas atómicas</u> Este caso é verdadeiro por hipótese.

$\underline{A \wedge B}$ Por hipótese de indução, temos

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A[\underline{t}/\underline{x}] \leftrightarrow A[\underline{q}/\underline{x}], \tag{1.7}$$
$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash B[\underline{t}/\underline{x}] \leftrightarrow B[\underline{q}/\underline{x}]. \tag{1.8}$$

Então

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A[\underline{t}/\underline{x}] \wedge B[\underline{t}/\underline{x}] \leftrightarrow A[\underline{q}/\underline{x}] \wedge B[\underline{q}/\underline{x}].$$

$\underline{A \vee B}$ Por hipótese de indução, temos (1.7) e (1.8). Então

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A[\underline{t}/\underline{x}] \vee B[\underline{t}/\underline{x}] \leftrightarrow A[\underline{q}/\underline{x}] \vee B[\underline{q}/\underline{x}],$$

porque derivamos $A[\underline{t}/\underline{x}] \to A[\underline{q}/\underline{x}] \vee B[\underline{q}/\underline{x}]$ e $B[\underline{t}/\underline{x}] \to A[\underline{q}/\underline{x}] \vee B[\underline{q}/\underline{x}]$, logo derivamos $A[\underline{t}/\underline{x}] \vee B[\underline{t}/\underline{x}] \to A[\underline{q}/\underline{x}] \vee B[\underline{q}/\underline{x}]$, e analogamente derivamos a implicação recíproca.

$\underline{A \to B}$ Por hipótese de indução, temos (1.7) e (1.8). Então

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (A[\underline{t}/\underline{x}] \to B[\underline{t}/\underline{x}]) \leftrightarrow (A[\underline{q}/\underline{x}] \to B[\underline{q}/\underline{x}]),$$

porque supondo $A[\underline{t}/\underline{x}] \to B[\underline{t}/\underline{x}]$ derivamos $A[\underline{q}/\underline{x}] \to B[\underline{q}/\underline{x}]$ aplicando duas vezes *modus ponens* a

$$A[\underline{q}/\underline{x}] \to A[\underline{t}/\underline{x}], \qquad A[\underline{t}/\underline{x}] \to B[\underline{t}/\underline{x}], \qquad B[\underline{t}/\underline{x}] \to B[\underline{q}/\underline{x}],$$

e derivamos a implicação recíproca analogamente.

$\underline{\forall y A}$ Por hipótese de indução, temos (1.7) para todas as variáveis $\underline{x}$ (de tipos compatíveis com $\underline{t}$ e $\underline{q}$). Temos dois casos.

1. $\underline{y \not\equiv x_1, \ldots, x_n}$ Neste caso é fácil concluir $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall y A[\underline{t}/\underline{x}] \leftrightarrow \forall y A[\underline{q}/\underline{x}]$, isto é, $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (\forall y A)[\underline{t}/\underline{x}] \leftrightarrow (\forall y A)[\underline{q}/\underline{x}]$.

2. $\underline{y \equiv x_i}$ Temos

$$\begin{aligned}(\forall y A)[\underline{t}/\underline{x}] &\equiv \forall y A[t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n/x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n],\\ (\forall y A)[\underline{q}/\underline{x}] &\equiv \forall y A[q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_n/x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n].\end{aligned}$$

   As matrizes de $(\forall y A)[\underline{t}/\underline{x}]$ e $(\forall y A)[\underline{q}/\underline{x}]$ são equivalentes, pois tomando uma variável $z \notin FV(A)$ do mesmo tipo de t_i temos, por hipótese de indução (que se aplica ao uplo de variáveis $x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n$),

$$\begin{aligned}A[t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n/x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n] &\equiv\\ A[t_1, \ldots, t_n/x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n] &\leftrightarrow\\ A[q_1, \ldots, q_n/x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n] &\equiv\\ A[q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_n/x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n]&.\end{aligned}$$

   Pela equivalência das matrizes sai $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (\forall y A)[\underline{t}/\underline{x}] \leftrightarrow (\forall y A)[\underline{q}/\underline{x}]$.

$\underline{\exists yA}$ Este caso é análogo ao anterior. $\square$

Corolario 29. *Para toda a fórmula A de HA_0^ω, temos*

$$\begin{aligned}
\mathsf{HA}_0^\omega &\vdash A[\Pi_{\rho,\tau} x^\rho y^\tau / w^\rho] \leftrightarrow A[x/w], \\
\mathsf{HA}_0^\omega &\vdash A[\Sigma_{\delta,\rho,\tau} x^{\tau\rho\delta} y^{\rho\delta} z^\delta / w^\tau] \leftrightarrow A[xz(yz)/w], \\
\mathsf{HA}_0^\omega &\vdash A[\underline{R}_{\underline{\rho}} 0 \underline{y}^{\underline{\rho}} \underline{z}^{\underline{\rho} 0 \underline{\rho}^t} / \underline{w}^{\underline{\rho}}] \leftrightarrow A[\underline{y}/\underline{w}], \\
\mathsf{HA}_0^\omega &\vdash A[\underline{R}_{\underline{\rho}} (Sx^0) \underline{y}^{\underline{\rho}} \underline{z}^{\underline{\rho} 0 \underline{\rho}^t} / \underline{w}^{\underline{\rho}}] \leftrightarrow A[\underline{z}(\underline{R}_{\underline{\rho}} x \underline{y}\,\underline{z})x/\underline{w}].
\end{aligned}$$

Nota biográfica 30. Arend Heyting (1898–1980) foi um matemático e lógico holandês cujo principal contributo consistiu em formular a lógica intuicionista em moldes tratáveis pela lógica matemática. O seu trabalho girou quase exclusivamente em torno do intuicionismo.

Antes de entrar para a universidade, Heyting queria ser engenheiro. Só perto do momento de entrar é que o seu gosto e propensão para a matemática o fizeram mudar de ideias. A sua vida profissional começou como professor no ensino secundário. Todo o seu tempo livre era dedicado à investigação.

Em 1925 doutorou-se sob a orientação de Luitzen E. J. Brouwer com uma tese intitulada *Axiomática intuicionista para a geometria projectiva* (*Intuitionistische axiomatieks der projektieve meetkunde*). Em 1927 a Associação Holandesa de Matemática colocou a prémio o problema de apresentar uma formalização das teorias intuicionistas de Brouwer. Heyting concorreu e ganhou o prémio no ano seguinte. Esse trabalho, refinado, expandido e publicado em 1930, gracejou fama a Heyting.

Heyting ensinou na Universidade de Amesterdão (Holanda) desde 1936 até se reformar em 1968.

Casou duas vezes e teve onze filhos da sua primeira mulher.

Nota histórica 31. Os axiomas de Peano foram apresentados por este em 1889 no seu texto [Peano 1889]. Historicamente são atribuídos a Peano, apesar deste afirmar que essencialmente pediu-os emprestados a Richard Dedekind e que suportou-se largamente em trabalhos de Hermann Grassmann. Quatro dos axiomas tratavam da igualdade: três postulavam a reflexividade, simetria e transitividade e um dizia que se n for um número natural e $m = n$, então m é um número natural. Outros quatro axiomas postulavam propriedades dos termos 1 e S: 1 é um número natural; o sucessor de um número natural é um número natural; $m = n \;\Rightarrow\; Sm = Sn$; e $Sn \neq 1$. Finalmente, o axioma de indução: para todo o conjunto K, se $1 \in K$ e $n \in K \;\Rightarrow\; Sn \in K$, então todos os números naturais pertencem a K. Este axioma de indução é um axioma de segunda ordem porque quantifica sobre todos os conjuntos. Notemos que, para Peano, os números naturais começavam no 1.

Nota biográfica 32. Giuseppe Peano (1858–1932) foi um matemático italiano. Axiomatizou os números naturais, criando a axiomática de Peano. Mostrou, por meio da curva de Peano, que existe uma sobrejecção do intervalo unitário para o quadrado unitário. Demonstrou o teorema de Peano: a equação diferencial $dy/dx =$

$f(x, y)$ tem solução se f for contínua. Deu importantes contribuições ao ensino do cálculo e formulou a primeira definição moderna de espaço vectorial. Interessou--se pelo conceito filosófico de definição bem formada. Introduziu muita da notação moderna, entre a qual os símbolos $\cap$, $\cup$, $\subset$ e $\in$ (na verdade, Peano usou ε). Tinha uma capacidade notável de encontrar erros nos trabalhos dos seus colegas, algo que nem sempre era levado a bem.

Em 1881 começou a trabalhar no seu *Formulario Mathematico*, um projecto ambicioso que pretendia reunir todos os resultados matemáticos usando uma notação *standard* do próprio. Este projectou ocupou-lhe tanto tempo que o fez descurar outros deveres, resultando no seu despedimento da Universidade de Turim.

Peano criou uma forma simplificada de latim, o *Latino sine flexiones* (latim sem flexões), que pretendia ser uma língua universal que facilitasse a divulgação do conhecimento.

Nota histórica 33. Originalmente, no artigo [Gödel 1958] de 1958, Gödel propõe que a sua teoria T lide com igualdade entre termos de tipo superior (isto é, de tipo ρ com $\rho \neq 0$). Numa revisão de aproximadamente 1972, [Gödel 1972], Gödel refere numa nota de rodapé outra possibilidade: trabalhar apenas com igualdade entre termos de tipo 0 e notar que a única função de uma igualdade $t =_\rho q$ é concluir $A(t) \leftrightarrow A(q)$. No entanto, não entra em detalhes. É Anne Troelstra que, numa nota introdutória às duas versões do artigo de Gödel em [Gödel 1990], explicita este tratamento minimal da igualdade sugerido por Gödel, apresentando os axiomas Π, Σ e $\underline{R}$ como "axiomas de substituição" da forma $A(t) \leftrightarrow A(q)$ em vez de "axiomas de igualdade" da forma $t =_\rho q$. Troelstra usa o índice 0 em T_0 para denotar a variante com tratamento minimal da igualdade de T.

1.4 Completude combinatorial

O objectivo desta secção é demonstrar que, dado um termo $t(x)$, existe um termo q que faz o papel da função $x \mapsto t(x)$. Mais precisamente, $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A\big[t[s/x]/w\big] \leftrightarrow A[qs/w]$. A existência destes termos é fundamental para (i) provar que toda a função primitiva recursiva pode é representada dentro de HA_0^ω por um termo e (ii) nos próximos capítulos, quando estudarmos as interpretações funcionais, definirmos termos nas condições dos chamados teoremas da correcção.

Teorema 34 (da completude combinatorial (para uma só variável))**.** *Para todo o termo $t^\tau(x^\rho)$ de HA_0^ω, existe um termo $\lambda x \,.\, t$ de HA_0^ω de tipo $\tau\rho$ tal que $FV(\lambda x \,.\, t) = FV(t) \setminus \{x\}$ e para todo o termo s^ρ de HA_0^ω e para toda a fórmula $A(w^\tau)$ de HA_0^ω, temos*

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A\big[t[s/x]/w\big] \leftrightarrow A[(\lambda x \,.\, t)s/w].$$

O termo $\lambda x\,.\,t$ fica definido pelas condições

$$\begin{array}{rcl} \lambda x\,.\,x & :\equiv & \Sigma_{\rho,\rho 0,\rho}\Pi_{\rho,\rho 0}\Pi_{\rho,0}, \\ \lambda x\,.\,t & :\equiv & \Pi_{\tau,\rho}t \textit{ se } x \notin FV(t), \\ \lambda x\,.\,(t_1^{\sigma\tau}t_2^{\tau}) & :\equiv & \Sigma_{\rho,\tau,\sigma}(\lambda x\,.\,t_1)(\lambda x\,.\,t_2) \textit{ se } x \in FV(t_1t_2). \end{array}$$

Demonstração. Para simplificar a escrita, denotemos $\lambda x\,.\,t$ por q. Em rigor, uma demonstração por indução na complexidade dos termos procedia deste modo: (i) verificávamos que o resultado vale para as constantes e para as variáveis e (ii) supondo que vale para termos t_1 e t_2, verificávamos que vale para t_1t_2. Vamos fazer a demonstração com uma divisão por casos diferente, mas que pode ser facilmente transformada numa demonstração da forma (i) e (ii).

Temos de verificar que cada um dos q definidos verifica $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A\big[t[s/x]/w\big] \leftrightarrow A[qs/w]$ e que as variáveis de q são as de t excepto x (esta última verificação é imediata). Vamos usar sistematicamente o corolário 29.

$\underline{t \equiv x}$ Temos

$$\begin{array}{rcl} A\big[t[s/x]/w\big] & \equiv & A[s/w] \\ & \leftrightarrow & A[\Pi_{\rho,\rho 0}s(\Pi_{\rho,0}s)/w] \\ & \leftrightarrow & A[\Sigma_{\rho,\rho 0,\rho}\Pi_{\rho,\rho 0}\Pi_{\rho,0}s/w] \\ & \equiv & A[qs/w]. \end{array}$$

$\underline{x \notin FV(t)}$ Temos

$$\begin{array}{rcl} A\big[t[s/x]/w\big] & \equiv & A[t/w] \\ & \leftrightarrow & A[\Pi_{\tau,\rho}ts/w] \\ & \equiv & A[qs/w]. \end{array}$$

$\underline{t \equiv t_1t_2 \text{ e } x \in FV(t)}$ Sejam $q_i :\equiv \lambda x\,.\,t_i$, y_1 e y_2 variáveis distinta de x, w e das variáveis que ocorrem em A, t_1, t_2, q_1, q_2 e s. Temos

$$\begin{array}{rcl} A\big[t[s/x]/w\big] & \equiv & A\big[t_1[s/x]t_2[s/x]/w\big] \\ & \equiv & \big(A\big[y_1t_2[s/x]/w\big]\big)\big[t_1[s/x]/y_1\big] \\ & \leftrightarrow & \big(A\big[y_1t_2[s/x]/w\big]\big)[q_1s/y_1] \\ & \equiv & A\big[q_1st_2[s/x]/w\big] \\ & \equiv & \big(A\big[q_1sy_2/w\big]\big)\big[t_2[s/x]/y_2\big] \\ & \equiv & \big(A\big[q_1sy_2/w\big]\big)[q_2s/y_2] \\ & \leftrightarrow & A\big[(q_1s)(q_2s)/w\big], \end{array}$$

onde nas equivalências usámos as hipóteses de indução. Precisámos que a variável y_1 fosse distinta das restantes variáveis já consideradas para que em $A(w)$ substituir w por $t_1[s/x]t_2[s/x]$ fosse o mesmo que substituir primeiro w por $y_1t_2[s/x]$ e depois substituir y_1 por $t_1[s/x]$. Analogamente para y_2. $\square$

Façamos duas observações acerca de definição de $\lambda x \,.\, x$. A primeira observação é que em vez de definirmos $\lambda x \,.\, x :\equiv \Sigma_{\rho,\rho 0,\rho}\Pi_{\rho,\rho 0}\Pi_{\rho,0}$ podíamos ter definido $\lambda x \,.\, x :\equiv \Sigma_{\rho,\rho\delta,\rho}\Pi_{\rho,\rho\delta}\Pi_{\rho,\delta}$, onde δ é um tipo qualquer. A segunda observação é que pretendemos que $\lambda x \,.\, x$ seja um termo q tal que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A\big[t[qs/x]/w\big] \leftrightarrow A\big[t[s/x]/w\big]$ e o primeiro termo nestas condições que ocorre é $q \equiv \Pi_{\rho,\rho}x$, mas não optámos por tomar este termo como definição de $\lambda x \,.\, x$ porque não verifica $FV(q) = FV(x) \setminus \{x\}$.

Definição 35.

1. Seja $\underline{x} = x_1, \ldots, x_k$ de HA_0^ω um uplo de variáveis e t um termo de HA_0^ω. Denotamos
$$\lambda x_1 \,.\, \Big(\lambda x_2 \,.\, \big(\cdots(\lambda x_k \,.\, t)\cdots\big)\Big)$$
por $\lambda \underline{x} \,.\, t$.

2. Seja $\underline{t} = t_1, \ldots, t_n$ um uplo de termos de HA_0^ω. Denotamos o uplo de termos $\lambda \underline{x} \,.\, t_1, \ldots, \lambda \underline{x} \,.\, t_n$ por $\lambda \underline{x} \,.\, \underline{t}$.

3. Dizemos que $\lambda \underline{x} \,.\, \underline{t}$ está definido por λ-*abstracção*.

Nos próximos capítulos, na demonstração dos chamados teoremas da correcção, iremos por vezes precisar de escolher termos que podem ser quaisquer desde que sejam de tipo apropriado. Iremos frequentemente escolher os termos $\mathcal{O}$, que fazem dentro de HA_0^ω as vezes dos funcionais identicamente nulos, por serem particularmente simples.

Definição 36. Para cada uplo de tipos $\underline{\rho}$ (eventualmente vazio), definimos o termo $\mathcal{O}^{0\underline{\rho}^t} :\equiv \lambda \underline{x}^\rho \,.\, 0^0$.

Vamos agora generalizar o teorema da completude combinatorial a uplos de variáveis, isto é, provar $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A\big[\underline{t}[\underline{s}/\underline{x}]/\underline{w}\big] \leftrightarrow A[(\lambda \underline{x} \,.\, \underline{t})\underline{s}/\underline{w}]$ onde, ao contrário do teorema 34, $\underline{t}$, $\underline{w}$, $\underline{x}$ e $\underline{s}$ são uplos. Notemos que a generalização não é trivial. Por exemplo, pretendemos que

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A[\underbrace{(\lambda x_1, x_2 \,.\, t)}_{\equiv \lambda x_1 \,.\, (\lambda x_2 \,.\, t)} s_1 s_2/w] \leftrightarrow A\big[t[s_1, s_2/x_1, x_2]/w\big]. \tag{1.9}$$

Era desejável que tal resultasse de aplicar duas vezes o teorema da completude combinatorial (para variáveis simples), mas não é o caso, porque após a primeira aplicação obtemos

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A\big[\big(\lambda x_1 \,.\, (\lambda x_2 \,.\, t)\big)s_1 s_2/w\big] \leftrightarrow A\big[(\lambda x_2 \,.\, t)[s_1/x_1]s_2/w\big],$$

e daqui já não conseguimos aplicar uma segunda vez o mesmo teorema. A menos que provemos que a λ-abstracção comuta com a substituição, isto é,

$$(\lambda x_2 \,.\, t)[s_1/x_1] \equiv \lambda x_2 \,.\, (t[s_1/x_1]).$$

É isso que vamos fazer no lema 37, mas com certas restrições sobre as variáveis. Mesmo com este resultado o que obtemos é

$$\begin{aligned}\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A\big[\big(\lambda x_1 \,.\, (\lambda x_2 \,.\, t)\big)s_1 s_2/w\big] &\leftrightarrow A\big[(\lambda x_2 \,.\, t)[s_1/x_1]s_2/w\big]\\ &\equiv A\big[\big(\lambda x_2 \,.\, (t[s_1/x_1])\big)s_2/w\big]\\ &\leftrightarrow A\big[t[s_1/x_1][s_2/x_2]/w\big],\end{aligned}$$

e, em geral, $t[s_1/x_1][s_2/x_2] \not\equiv t[s_1, s_2/x_1, x_2]$, pelo que ainda não obtemos (1.9). No entanto vamos conseguir mostrar no lema 39 que, com certas restrições sobre as variáveis, temos $t[s_1/x_1][s_2/x_2] \equiv t[s_1, s_2/x_1, x_2]$, obtendo (1.9) mas com restrições sobre as variáveis. Finalmente, conseguimos contornar essas restrições usando o lema 41.

Lema 37 (λ-abstracção comuta com a substituição)**.** *Sejam $t(x, y)$ e s termos de HA_0^ω, onde $x \not\equiv y$. Se $x \notin FV(s)$, então*

$$(\lambda x \,.\, t)[s/y] \equiv \lambda x \,.\, (t[s/y]).$$

Demonstração. O termo $\lambda x \,.\, t$ é definido pelas seguintes condições:

$$\begin{aligned}\lambda x \,.\, x &:\equiv \Sigma_{\rho,\rho 0,\rho}\Pi_{\rho,\rho 0}\Pi_{\rho,0},\\ \lambda x \,.\, t &:\equiv \Pi_{\tau,\rho} t \text{ se } x \notin FV(t),\\ \lambda x \,.\, (t_1^{\sigma\tau} t_2^{\tau}) &:\equiv \Sigma_{\rho,\tau,\sigma}(\lambda x \,.\, t_1)(\lambda x \,.\, t_2) \text{ se } x \in FV(t_1 t_2).\end{aligned}$$

O termo $\lambda x \,.\, (t[s/y])$ é definido pelas seguintes condições:

$$\begin{aligned}\lambda x \,.\, x &:\equiv \Sigma_{\rho,\rho 0,\rho}\Pi_{\rho,\rho 0}\Pi_{\rho,0},\\ \lambda x \,.\, (t[s/y]) &:\equiv \Pi_{\tau,\rho}(t[s/y]) \text{ se } x \notin FV(t[s/y]),\\ \lambda x \,.\, (t_1^{\sigma\tau}[s/y]t_2^{\tau}[s/y]) &:\equiv \Sigma_{\rho,\tau,\sigma}[\lambda x \,.\, (t_1[s/y])][\lambda x \,.\, (t_2[s/y])] \text{ se}\\ &\ x \in FV(t_1[s/y]t_2[s/y]).\end{aligned}$$

Fazemos a demonstração por indução na complexidade de t.

<u>t é uma variável</u>

1. <u>$t \equiv x$</u> Neste caso o resultado é óbvio.

2. <u>$t \not\equiv x$</u> Temos $x \notin FV(t)$ e (atendendo a que por hipótese $x \notin FV(s)$) $x \notin FV(t[s/y])$, logo $(\lambda x \,.\, t)[s/y] \equiv (\Pi_{\tau,\rho} t)[s/y] \equiv \Pi_{\tau,\rho}(t[s/y]) \equiv \lambda x \,.\, (t[s/y])$.

<u>t é uma constante</u> Neste caso o resultado é óbvio.

<u>$t \equiv t_1 t_2$</u>

1. <u>$x \notin FV(t)$</u> Análogo ao caso em que t é uma variável diferente de x.

2. $\underline{x \in FV(t)}$ Por hipótese de indução, temos $(\lambda x\,.\,t_i)[s/y] \equiv \lambda x\,.\,(t_i[s/y])$, logo

$$\begin{aligned}(\lambda x\,.\,t)[s/y] &\equiv [\Sigma_{\rho,\tau,\sigma}(\lambda x\,.\,t_1)(\lambda x\,.\,t_2)][s/y]\\ &\equiv \Sigma_{\rho,\tau,\sigma}\big[(\lambda x\,.\,t_1)[s/y]\big]\big[(\lambda x\,.\,t_2)[s/y]\big]\\ &\equiv \Sigma_{\rho,\tau,\sigma}[\lambda x\,.\,(t_1[s/y])][\lambda x\,.\,(t_2[s/y])]\\ &\equiv \lambda x\,.\,(t[s/y]).\quad \square\end{aligned}$$

Observação 38. No lema anterior a hipótese $x \notin FV(s)$ não pode ser levantada. Por exemplo, se $t \equiv y$ e $s \equiv x$ (notemos que $x \in FV(s)$), então

$$(\lambda x\,.\,t)[s/y] \equiv \Pi x, \qquad \lambda x\,.\,(t[s/y]) \equiv \Sigma\Pi\Pi,$$

logo $(\lambda x\,.\,t)[s/y] \not\equiv \lambda x\,.\,(t[s/y])$.

Lema 39 (decomposição da substituição simultânea em substituições simples)**.**

1. *Para todo o termo t, para todas as variáveis distintas $x_1, \ldots, x_n$ e para todos os termos $q_1, \ldots, q_n$, se $y_1, \ldots, y_n$ forem variáveis distintas, cada y_i for diferente de cada x_j e cada y_i não ocorrer em t nem em cada q_j, então*

$$t[\underline{q}/\underline{x}] \equiv \underbrace{t[y_1/x_1]\cdots[y_n/x_n]}_{\equiv t[\underline{y}/\underline{x}]}[q_1/y_1]\cdots[q_n/y_n].$$

2. *Para toda a fórmula A, para todas as variáveis distintas $x_1, \ldots, x_n$ e para todos os termos $q_1, \ldots, q_n$, se $y_1, \ldots, y_n$ forem variáveis distintas, cada y_i for diferente de cada x_j e cada y_i não ocorrer em A nem em cada q_j, então*

$$A[\underline{q}/\underline{x}] \equiv \underbrace{A[y_1/x_1]\cdots[y_n/x_n]}_{\equiv A[\underline{y}/\underline{x}]}[q_1/y_1]\cdots[q_n/y_n].$$

Demonstração.

1. Demonstramos a alínea 1 por indução na complexidade de t.

$\underline{t \text{ é constante}}$ Este caso é óbvio.

$\underline{t \text{ é variável}}$ Se t for diferente de cada x_i, então o resultado e óbvio. Se $t \equiv x_i$, então $t[\underline{q}/\underline{x}] \equiv q_i$, $t[y_1/x_1]\cdots[y_n/x_n] \equiv y_i$ (porque $y_i \not\equiv x_{i+1}, \ldots, x_n$) e portanto $t[y_1/x_1]\cdots[y_n/x_n][q_1/y_1]\cdots[q_n/y_n] \equiv q_i$ (porque $y_{i+1}, \ldots, y_n \notin FV(q_i)$).

$\underline{t \equiv t_1 t_2}$ Este caso é fácil de demonstrar usando as hipóteses de indução para t_1 e t_2.

2. Demonstramos a alínea 2 por indução na complexidade das fórmulas (notemos que a hipótese de indução vale para todo o n, para todos os $q_1, \ldots, q_n$, para todos os $x_1, \ldots, x_n$ e para todos os $y_1, \ldots, y_n$ nas condições do enunciado). Só o caso $\exists z A$

com $z \equiv x_i$ e $\daleth \in \{\forall, \exists\}$ não é fácil (notemos que ainda há o caso $z \not\equiv x_1, \ldots, x_n$). Vejamos este caso. Temos

$$
\begin{aligned}
(\daleth x_i A)[\underline{q}/\underline{x}] &\equiv \daleth x_i A[q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_n/x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n] \\
&\equiv \daleth x_i A[y_1/x_1] \cdots [y_{i-1}/x_{i-1}][y_{i+1}/x_{i+1}] \cdots [y_n/x_n] \\
&\quad\ [q_1/y_1] \cdots [q_{i-1}/y_{i-1}][q_{i+1}/y_{i+1}] \cdots [q_n/y_n] \\
&\equiv \underbrace{(\daleth x_i A)[y_1/x_1] \cdots [y_{i-1}/x_{i-1}]}_{\equiv: B_1}[y_{i+1}/x_{i+1}] \cdots [y_n/x_n] \\
&\quad\ [q_1/y_1] \cdots [q_{i-1}/y_{i-1}][q_{i+1}/y_{i+1}] \cdots [q_n/y_n] \\
&\equiv \underbrace{(\daleth x_i A)[y_1/x_1] \cdots [y_n/x_n][q_1/y_1] \cdots [q_{i-1}/y_{i-1}]}_{\equiv: B_2}[q_{i+1}/y_{i+1}] \cdots [q_n/y_n] \\
&\equiv (\daleth x_i A)[y_1/x_1] \cdots [y_n/x_n][q_1/y_1] \cdots [q_n/y_n],
\end{aligned}
$$

onde a primeira igualdade resulta de x_i estar quantificado, a segunda igualdade resulta da hipótese de indução (que podemos aplicar porque os $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ são distintos, os $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ são distintos, não ocorrem nos $q_1, \ldots, q_{i-1}$, $q_{i+1}, \ldots, q_n$ e cada y_i é distinto de cada x_j), a terceira igualdade resulta de $x_i \not\equiv x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, a quarta igualdade resulta de $B_1 \equiv B_1[y_i/x_i]$ (porque x_i está quantificado em B_1) e a quinta igualdade resulta de $B_2 \equiv B_2[q_i/y_i]$ (porque y_i não ocorre em B_2).

Demonstramos as igualdades $t[\,\underline{y}\,/\,\underline{x}\,] \equiv t[y_1/x_1] \cdots t[y_n/x_n]$ e $A[\,\underline{y}\,/\,\underline{x}\,] \equiv A[y_1/x_1] \cdots [y_n/x_n]$ por indução na complexidade dos termos e das fórmulas, respectivamente, usando argumentos análogos. $\square$

Observação 40. O lema anterior tem a hipótese de as variáveis y_i não ocorrerem em t nem em A. Estas hipóteses não podem ser levantadas.

Informalmente, explicação é a seguinte. Se um dos y_i ocorresse em t, então em $t[\underline{y}/\underline{x}][q_1/y_1] \cdots [q_n/y_n]$ ia ocorrer um q_i não só nos lugares onde antes ocorriam x_i, como ainda no lugar onde ocorria o y_i. Portanto, estas substituições fariam ocorrer q_i mais vezes em $t[\underline{y}/\underline{x}][q_1/y_1] \cdots [q_n/y_n]$ do que em $t[\underline{q}/\underline{x}]$, fazendo com que estes dois termos fossem diferentes (isto é, o lema falhasse).

Mais formalmente, temos o seguinte contra-exemplo. Consideremos $\underline{x} = x$, $\underline{y} = y$, $\underline{q} = q \not\equiv y$ (isto é, os uplos $\underline{x}$, $\underline{y}$ e $\underline{q}$ têm uma só componente) e $t \equiv y$ (notemos que y ocorre em t). Então

$$t[q/x] \equiv y, \qquad t[y/x][q/y] \equiv q,$$

logo $t[q/x] \not\equiv t[y/x][q/y]$.

Analogamente explicamos e damos um contra-exemplo para mostrar que é precisa a hipótese de as variáveis y_i não ocorrerem em A. Para o contra-exemplo podemos considerar a fórmula $A \equiv \forall y(x =_0 y)$ (notemos que y ocorre em A) e um termo $q \not\equiv y$. Com esta fórmula temos

$$A[q/x] \equiv \forall y(q =_0 y), \qquad A[y/x][q/y] \equiv \forall y(y =_0 y),$$

logo $A[q/x] \not\equiv A[y/x][q/y]$.

É interessante notar que neste último contra-exemplo a variável y não está livre em A. Esta observação esclarece-nos a seguinte questão: será que pedir que os y_i não ocorram em A não é demasiado, bastando pedir que não estejam livres em A? Este mesmo contra-exemplo mostra que a resposta é negativa.

Lema 41. *Sejam $\underline{x}^{\rho}$ um uplo de variáveis distintas, $\underline{y}^{\rho}$ também um uplos de variáveis distintas, cada y_i diferente de cada x_j e $t(\underline{x})$ um termo onde não ocorrem $\underline{y}$. Temos $\lambda\underline{x}\,.\,t(\underline{x}) \equiv \lambda\underline{y}\,.\,t(\underline{y})$, isto é, $\lambda\underline{x}\,.\,t \equiv \lambda\underline{y}\,.\,(t[\underline{y}/\underline{x}])$.*

Demonstração. Pelo lema da decomposição da substituição simultânea em substituições simples temos $t[\underline{y}/\underline{x}] \equiv t[y_1/x_1]\cdots[y_n/x_n]$, pelo que em vez de demonstrarmos $\lambda\underline{x}\,.\,t \equiv \lambda\underline{y}\,.\,(t[\underline{y}/\underline{x}])$, vamos demonstrar $\lambda\underline{x}\,.\,t \equiv \lambda\underline{y}\,.\,(t[y_1/x_1]\cdots[y_n/x_n])$. Fazemos a demonstração por indução no número de variáveis de $\underline{x}$.

<u>Case base</u> Suponhamos que os uplos $\underline{x} = x$ e $\underline{y} = y$ têm uma só variável. As condições que definem $\lambda x\,.\,t(x)$ são:

$$\begin{aligned}
\lambda x\,.\,x &:\equiv \Sigma_{\rho,\rho 0,\rho}\Pi_{\rho,\rho 0}\Pi_{\rho,0},\\
\lambda x\,.\,t(x) &:\equiv \Pi_{\tau,\rho}t(x) \text{ se } x \notin FV\big(t(x)\big),\\
\lambda x\,.\,[t_1^{\sigma\tau}(x)t_2^{\tau}(x)] &:\equiv \Sigma_{\rho,\tau,\sigma}[\lambda x\,.\,t_1(x)][\lambda x\,.\,t_2(x)] \text{ se } x \in FV\big(t_1(x)t_2(x)\big).
\end{aligned}$$

As condições que definem $\lambda y\,.\,t(y)$ são:

$$\begin{aligned}
\lambda y\,.\,y &:\equiv \Sigma_{\rho,\rho 0,\rho}\Pi_{\rho,\rho 0}\Pi_{\rho,0},\\
\lambda y\,.\,t(y) &:\equiv \Pi_{\tau,\rho}t(y) \text{ se } y \notin FV\big(t(y)\big),\\
\lambda y\,.\,[t_1^{\sigma\tau}(y)t_2^{\tau}(y)] &:\equiv \Sigma_{\rho,\tau,\sigma}[\lambda y\,.\,t_1(y)][\lambda y\,.\,t_2(y)] \text{ se } y \in FV\big(t_1(y)t_2(y)\big).
\end{aligned}$$

Fazemos a demonstração por indução na complexidade de t.

1. <u>t é uma variável</u>

   (a) <u>$t \equiv x$</u> Temos $t(x) \equiv x$ e $t(y) \equiv y$, logo $\lambda x\,.\,t(x) \equiv \lambda y\,.\,t(y)$.

   (b) <u>$t \not\equiv x$</u> Temos $x \notin FV\big(t(x)\big)$ e (atendendo a que por hipótese $y \notin FV(t)$) $y \notin FV\big(t(y)\big)$ e $t(x) \equiv t(y)$, logo $\lambda x\,.\,t(x) \equiv \lambda y\,.\,t(y)$.

2. <u>t é uma constante</u> Análogo ao caso em que t é uma variável diferente de x.

3. <u>$t \equiv t_1 t_2$</u>

   (a) <u>$x \notin FV(t)$</u> Análogo ao caso anterior.

   (b) <u>$x \in FV(t)$</u> Por hipótese de indução, temos $\lambda x\,.\,t_i(x) \equiv \lambda y\,.\,t_i(y)$. Temos $x \in FV\big(t(x)\big)$ e $y \in FV\big(t(y)\big)$, logo $\lambda x\,.\,t(x) \equiv \lambda y\,.\,t(y)$.

Passo de indução Temos

$$\begin{aligned}
\lambda \underline{x} \,.\, t &\equiv \lambda x_1 \,.\, (\lambda x_2, \ldots, x_n \,.\, t) \\
&\equiv \lambda y_1 \,.\, \big[(\lambda x_2, \ldots, x_n \,.\, t)[y_1/x_1]\big] \\
&\equiv \lambda y_1 \,.\, \big[\lambda x_2, \ldots, x_n \,.\, (t[y_1/x_1])\big] \\
&\equiv \lambda y_1 \,.\, \big[\lambda y_2, \ldots, y_n \,.\, (t[y_1/x_1] \cdots [y_n/x_n])\big] \\
&\equiv \lambda \underline{y} \,.\, (t[y_1/x_1] \cdots [y_n/x_n]),
\end{aligned}$$

onde na primeira igualdade usámos a definição de λ-abstracção, na segunda igualdade usámos o resultado para o caso de uma variável (demonstrado no caso base e que aplica-se porque $x_1 \not\equiv y_1$ e $y_1 \notin FV(\lambda x_2, \ldots, x_n \,.\, t)$), na terceira igualdade usámos $n-1$ vezes o lema da comutação da λ-abstracção com a substituição (atendendo a que as variáveis $\underline{x}$ são distintas entre si e diferentes de y_1), na quarta igualdade usámos a hipótese de indução (que se aplica porque as variáveis $x_2, \ldots, x_n$ são distintas, as variáveis $y_2, \ldots, y_n$ são distintas, cada y_i é diferente de cada x_j e $y_2, \ldots, y_n \notin FV(t[y_1/x_1])$) e na quinta igualdade usámos a definição de λ-abstracção. □

Observação 42. A hipótese de os $\underline{y}$ não ocorrerem em t no lema anterior não pode ser levantada. Informalmente, a razão é a seguinte. Digamos que no termo t há k ocorrências das variáveis $\underline{x}$. Então em $\lambda \underline{x} \,.\, t$, a λ-abstracção alcança k ocorrências de variáveis em t. Se, por exemplo, um e um só y_i ocorresse uma e uma só vez em t, então em $\lambda \underline{y} \,.\, (t[\underline{y}/\underline{x}])$ haveria $k+1$ ocorrências de variáveis $\underline{y}$ em $t[\underline{y}/\underline{x}]$ ao alcance da λ-abstracção. Esta diferença no alcance da λ-abstracção em $\lambda \underline{x} \,.\, t$ e em $\lambda \underline{y} \,.\, (t[\underline{y}/\underline{x}])$ faria com que estes dois termos fossem diferentes.

Pode também ser interessante pensar neste exemplo: $\lambda x \,.\, y$ informalmente é a função constante $x \mapsto y$, enquanto $\lambda y \,.\, (y[y/x])$ é a função identidade $y \mapsto y$. Com esta interpretação em mente, é intuitivo que $\lambda x \,.\, y \not\equiv \lambda y \,.\, (y[y/x])$.

Mais formalmente, temos o seguinte contra-exemplo que mostra que temos de ter a hipótese de os $\underline{y}$ não ocorrerem em t. Digamos que $\underline{x} = x$, $\underline{y} = y$ (isto é, os uplos $\underline{x}$ e $\underline{y}$ têm uma só variável) e $t \equiv \Pi x y$ (notemos que y ocorre em t). Temos

$$FV(\lambda x \,.\, t) = FV(t) \setminus \{x\} = \{y\}, \qquad FV\big(\lambda y \,.\, (t[y/x])\big) = FV(t[y/x]) \setminus \{y\} = \emptyset,$$

pelo que os termos $\lambda x \,.\, t$ e $\lambda y \,.\, (t[y/x])$ têm de ser diferentes.

Outra forma de verificar que os termos $\lambda x \,.\, t \equiv \lambda x \,.\, (\Pi x y)$ e $\lambda y \,.\, (t[y/x]) \equiv \lambda y \,.\, (\Pi y y)$ são diferentes é calcular explicitamente estes termos:

$$\begin{aligned}
\lambda x \,.\, (\Pi x y) &\equiv \Sigma[\Sigma(\Pi\Pi)(\Sigma\Pi\Pi)](\Pi y), \\
\lambda y \,.\, (\Pi y y) &\equiv \Sigma[\Sigma(\Pi\Pi)(\Sigma\Pi\Pi)](\Sigma\Pi\Pi).
\end{aligned}$$

Teorema 43 (da completude combinatorial (para uplos de variáveis e de termos))**.** *Para todos os termos $\underline{t}^{\underline{\tau}}(\underline{x}^{\underline{\rho}})$ (onde as variáveis $\underline{x}$ são distintas) e $\underline{s}^{\underline{\rho}} = s_1^{\rho_1}, \ldots, s_n^{\rho_n}$ de HA_0^ω e para toda a fórmula $A(\underline{w}^{\underline{\tau}})$ de HA_0^ω, temos*

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A\big[\underline{t}[\underline{s}/\underline{x}]/\underline{w}\big] \leftrightarrow A[(\lambda \underline{x} \,.\, \underline{t})\underline{s}/\underline{w}].$$

Demonstração.

1. Num primeiro passo supomos que em vez de um uplos de termos $\underline{t}$ temos um só termo t. Começamos por demonstrar por indução em n que sob as hipóteses do enunciado e ainda sob a hipótese adicional de as variáveis $\underline{x}$ não ocorrerem nos termos $\underline{s}$, temos

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A\big[t[s_1/x_1]\cdots[s_n/x_n]/w\big] \leftrightarrow A[(\lambda\underline{x}\,.\,t)\underline{s}/w].$$

O caso base resulta do teorema da completude combinatorial para uma só variável. Para o passo de indução, fazemos os cálculos

$$\begin{aligned} A[(\lambda\underline{x}\,.\,t)\underline{s}/w] &\equiv A\big[\big(\lambda x_1\,.\,(\lambda x_2,\ldots,x_n\,.\,t)\big)s_1\cdots s_n/w\big] \\ &\leftrightarrow A\big[(\lambda x_2,\ldots,x_n\,.\,t)[s_1/x_1]s_2\cdots s_n/w\big] \\ &\equiv A\big[\big(\lambda x_2,\ldots,x_n\,.\,(t[s_1/x_1])\big)s_2\cdots s_n/w\big] \\ &\equiv A\big[t[s_1/x_1]\cdots[s_n/x_n])/w\big], \end{aligned}$$

onde na primeira igualdade usámos a definição de λ-abstracção, na equivalência usámos o teorema da completude combinatorial para uma só variável, na segunda igualdade aplicámos $n-1$ vezes o lema da comutação da λ-abstracção com a substituição (que aplica-se porque $x_1 \not\equiv x_2,\ldots,x_n$ e $x_2,\ldots,x_n \notin FV(s_1)$ devido à hipótese adicional que estamos a supor) e na terceira igualdade usámos a hipótese de indução (que aplica-se porque as variáveis $x_2,\ldots,x_n$ são distintas e não ocorrem em $s_2,\ldots,s_n$).

2. Num segundo passo demonstramos o teorema, ainda supondo que temos um só termo t, mas já sem a hipótese adicional de as variáveis $\underline{x}$ não ocorrerem nos termos $\underline{s}$. Seja $\underline{y}^{\underline{\rho}} = y_1^{\rho_1},\ldots,y_n^{\rho_n}$ um uplo de variáveis distintas entre si, distintas das variáveis de $\underline{x}$ e que não ocorram nos termos t e $\underline{s}$. Em HA_0^ω temos

$$\begin{aligned} A[(\lambda\underline{x}\,.\,t)\underline{s}/w] &\equiv A\big[\lambda\underline{y}\,.\,(t[\underline{y}/\underline{x}])\underline{s}/w\big] \\ &\leftrightarrow A\big[t[\underline{y}/\underline{x}][s_1/y_1]\cdots[s_n/y_n]\big] \\ &\equiv A\big[t[\underline{s}/\underline{x}]/w\big], \end{aligned}$$

onde na primeira igualdade usámos o lema 41 (que aplica-se porque as variáveis de $\underline{x},\underline{y}$ são distintas e os $\underline{y}$ não ocorrem em t), na equivalência usámos a o resultado já demonstrado com a hipótese adicional (que aplica-se porque os $\underline{y}$ não ocorrem nos $\underline{s}$) e na segunda igualdade usámos o lema da decomposição da substituição simultânea em substituições simples (que aplica-se porque os $\underline{x},\underline{y}$ são distintos e os $\underline{y}$ não ocorrem em t nem nos $\underline{s}$).

3. Finalmente, num terceiro passo provamos o teorema para uplos de termos $\underline{t}$ usando o passo anterior. Tomando variáveis $\underline{y}$ distintas entre si, distintas dos $\underline{x}$ e que não ocorrem em $A[\underline{y}/\underline{w}]$ nem nos $t_i[\underline{s}/\underline{x}]$ e nem nos $\underline{s}$, pelo lema da decomposição da substituição simultânea em substituições simples temos

$$A\big[\underline{t}[\underline{s}/\underline{x}]/\underline{w}\big] \equiv A[\underline{y}/\underline{w}]\big[t_1[\underline{s}/\underline{x}]/y_1\big]\cdots\big[t_k[\underline{s}/\underline{x}]/y_k\big].$$

Aplicando k vezes o passo anterior temos

$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A[\underline{y}/\underline{w}]\big[t_1[\underline{s}/\underline{x}]/y_1\big] \cdots \big[t_k[\underline{s}/\underline{x}]/y_k\big] \leftrightarrow A[\underline{y}/\underline{w}][(\lambda\underline{x}\,.\,t_1)\underline{s}/y_1] \cdots [(\lambda\underline{x}\,.\,t_k)\underline{s}/y_k]$.

Novamente pelo lema da decomposição da substituição simultânea em substituições simples, temos

$$A[\underline{y}/\underline{w}][(\lambda\underline{x}\,.\,t_1)\underline{s}/y_1] \cdots [(\lambda\underline{x}\,.\,t_k)\underline{s}/y_k] \equiv A[(\lambda\underline{x}\,.\,\underline{t})\underline{s}/\underline{w}]. \qquad \square$$

Observação 44. Nas condições do enunciado do teorema da completude combinatorial, e supondo $\tau = 0$, temos

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash t[\underline{s}/\underline{x}] =_0 (\lambda\underline{x}\,.\,t)\underline{s}.$$

Para o verificar, consideramos $A(w^0) :\equiv w =_0 (\lambda\underline{x}\,.\,t)\underline{s}$. Pelo teorema vem

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(t[\underline{s}/\underline{x}]) \leftrightarrow A([\lambda\underline{x}\,.\,t]\underline{s}),$$

isto é,

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash t[\underline{s}/\underline{x}] =_0 (\lambda\underline{x}\,.\,t)\underline{s} \leftrightarrow (\lambda\underline{x}\,.\,t)\underline{s} =_0 (\lambda\underline{x}\,.\,t)\underline{s}.$$

Como o membro direito desta equivalência é derivável em HA_0^ω, então também o membro esquerdo é derivável em HA_0^ω.

1.5 Termos que representam funções primitivas recursivas

Todo o número natural n é representado dentro de HA_0^ω por um termo fechado de tipo 0 (o seu numeral $\overline{n}$). O teorema seguinte diz-nos que o recíproco também é verdade: todo o termo fechado de tipo 0 representa um número natural.

Teorema 45 (todo o termo fechado de tipo 0 é redutível a um numeral)**.** *Para todo o termo t fechado de tipo 0 de HA_0^ω, existe um e um só número natural n tal que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash t =_0 \overline{n}$ (a unicidade requer que assumamos a consistência de HA_0^ω).*

Demonstração. Encontramos a demonstração em [Troelstra 1973], capítulo II, parágrafo 2, e em [Troelstra e van Dalen 1988], capítulo 9, secção 2. $\square$

O teorema anterior garante-nos que a seguinte noção está bem definida.

Definição 46. Seja t um termo fechado de tipo $0 \cdots 0$ (n vezes). Definimos a função $Ft : \mathbb{N}^{n-1} \to \mathbb{N}$ pela condição de, para cada $(k_1, \ldots, k_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$, termos

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash t\overline{k_1} \cdots \overline{k_{n-1}} =_0 \overline{Ft(k_1, \ldots, k_{n-1})}$$

(no caso $n = 1$ consideramos que $(k_1, \ldots, k_{n-1})$ é o uplo vazio e Ft é o único número natural tal que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash t =_0 \overline{Ft}$).

De seguida mostramos que para toda a função primitiva recursiva f, existe um termo Tf que representa f dentro de HA_0^ω.

Teorema 47 (termos que representam funções primitivas recursivas)**.**

1. *Para toda a função primitiva recursiva $f : \mathbb{N}^{n-1} \to \mathbb{N}$ existe um termo Tf fechado de HA_0^ω de tipo $0 \cdots 0$ (n vezes) tal que $f = FTf$, isto é, para todos os $k_1, \ldots, k_{n-1} \in \mathbb{N}$ temos*

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Tf\overline{k_1} \cdots \overline{k_{n-1}} =_0 \overline{f(k_1, \ldots, k_{n-1})}.$$

O termo Tf fica definido por indução nas funções primitivas recursivas pelas seguintes condições (onde 0, Z, S e P_{ki} são as funções iniciais, f é definida por composição generalizada e f' por recursão primitiva):

$$\begin{array}{rl}
0 \in \mathbb{N} & T0 :\equiv 0^0, \\
Z(x) = 0 & TZ :\equiv \lambda x\,.\,0, \\
S(x) = x + 1 & TS :\equiv S, \\
P_{ki}(x_1, \ldots, x_k) = x_i & TP_{ki} :\equiv \lambda x_1, \ldots, x_k\,.\,x_i, \\
f(\underline{x}) = h\big(g_1(\underline{x}), \ldots, g_m(\underline{x})\big) & Tf :\equiv \lambda \underline{x}\,.\,[Th\,(Tg_1\,\underline{x}) \cdots (Tg_m\,\underline{x})], \\
\left\{\begin{array}{lcl} f'(0, \underline{x}) & = & g'(\underline{x}) \\ f'(y+1, \underline{x}) & = & h'\big(y, f'(y, \underline{x}), \underline{x}\big) \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} Tf' :\equiv \lambda y, \underline{x}\,.\,[R_0 y(Tg'\,\underline{x})(H\underline{x})] \\ H :\equiv \lambda \underline{x}, z, y\,.\,[Th'\,yz\underline{x}] \end{array}\right. .
\end{array}$$

2. *Temos*

$$\begin{array}{lcl}
\mathsf{HA}_0^\omega & \vdash & T0 =_0 0, \\
\mathsf{HA}_0^\omega & \vdash & TZ\,x =_0 0, \\
\mathsf{HA}_0^\omega & \vdash & TS\,x =_0 Sx, \\
\mathsf{HA}_0^\omega & \vdash & TP_{ki}\,x_1 \cdots x_k =_0 x_i, \\
\mathsf{HA}_0^\omega & \vdash & Tf\underline{x} =_0 Th\,(Tg_1\,\underline{x}) \cdots (Tg_m\,\underline{x}), \\
\mathsf{HA}_0^\omega & \vdash & Tf'\,0\underline{x} =_0 Tg'\,\underline{x}, \\
\mathsf{HA}_0^\omega & \vdash & Tf'\,(Sy)\underline{x} =_0 Th'\,y(Tf'\,y\underline{x})\underline{x}.
\end{array}$$

Demonstração.

2. Começamos por demonstrar a alínea 2.

<u>Funções iniciais</u> Pela reflexividade de $=_0$, temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash T0 =_0 0$. Atendendo à observação 44, temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash TZ\,x =_0 0[x/x]$, onde $0[x/x] \equiv 0$. Analogamente para S e P_{ki}.

<u>Composição generalizada</u> Análogo aos casos anteriores.

<u>Recursão primitiva</u>

1. Temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Tf'\,0\underline{x} =_0 R_0 0(Tg'\,\underline{x})(H\underline{x})$. Pela observação 24 vem $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash R_0 0(Tg'\,\underline{x})(H\underline{x}) =_0 Tg'\,\underline{x}$. Destas duas igualdades vem, pela transitividade de $=_0$, $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Tf'\,0\underline{x} =_0 Tg'\,\underline{x}$.

2. Temos
$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Tf'\,(Sy)\underline{x} =_0 R_0(Sy)(Tg'\,\underline{x})(H\underline{x}), \tag{1.10}$$
Pela observação 24 vem
$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash R_0(Sy)(Tg'\,\underline{x})(H\underline{x}) =_0 H\underline{x}[R_0 y(Tg'\,\underline{x})(H\underline{x})]y. \tag{1.11}$$
Pela observação 44 vem
$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash H\underline{x}[R_0 y(Tg'\,\underline{x})(H\underline{x})]y =_0 Th'\,y[R_0 y(Tg'\,\underline{x})(H\underline{x})]\underline{x}. \tag{1.12}$$
De (1.10), (1.11) e (1.12) vem, pela transitividade de $=_0$,
$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Tf'\,(Sy)\underline{x} =_0 Th'\,y[R_0 y(Tg'\,\underline{x})(H\underline{x})]\underline{x}. \tag{1.13}$$
Pela observação 44 vem
$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Tf'\,y\underline{x} =_0 R_0 y(Tg'\,\underline{x})(H\underline{x}). \tag{1.14}$$
Pelo axioma $x =_0 y \wedge A(x) \to A(y)$ e por (1.14), podemos em (1.13) substituir $R_0 y(Tg'\,\underline{x})(H\underline{x})$ por $Tf'\,y\underline{x}$, obtendo o resultado pretendido.

1. Vamos provar, por indução nas funções primitivas recursivas, que os termos definidos no enunciado satisfazem $f = FTf$. Usamos os factos já provados da alínea 2.

<u>Funções iniciais</u> Temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash T0 =_0 \overline{0}$, onde $\overline{0} \equiv 0$, logo $FT0 = 0$. Como $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash TZ\,\overline{k} =_0 0$, então $FTZ = Z$. Analogamente para S e P_{ki}.

<u>Composição generalizada</u> Temos
$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Tf\,\overline{\underline{k}} =_0 Th\,(Tg_1\,\overline{\underline{k}})\cdots(Tg_m\,\overline{\underline{k}}), \tag{1.15}$$
onde $\overline{\underline{k}} := \overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}$. Por hipótese de indução, temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Tg_i\,\overline{\underline{k}} =_0 \overline{g_i(\underline{k})}$, onde $\underline{k} = k_1, \ldots, k_n$. Aplicando m vezes o axioma $x =_0 y \wedge A(x) \to A(y)$, podemos em (1.15) substituir cada $Tg_i\,\overline{\underline{k}}$ por $\overline{g_i(\underline{k})}$, obtendo
$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Tf\,\underline{k} =_0 Th\,[\overline{g_1(\underline{k})}]\cdots[\overline{g_m(\underline{k})}]. \tag{1.16}$$
Também por hipótese de indução, temos
$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Th\,\big[\overline{g_1(\underline{k})}\big]\cdots\big[\overline{g_m(\underline{k})}\big] =_0 \overline{h\big(g_1(\underline{k}), \ldots, g_m(\underline{k})\big)},$$
onde $h\big(g_1(\underline{k}), \ldots, g_m(\underline{k})\big) = f(\underline{k})$. Logo
$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Th\,\big[\overline{g_1(\underline{k})}\big]\cdots\big[\overline{g_m(\underline{k})}\big] =_0 \overline{f(\underline{k})}. \tag{1.17}$$
Pela transitividade de $=_0$, de (1.16) e (1.17) vem o resultado pretendido.

<u>Recursão primitiva</u> Vamos provar por indução em $m \in \mathbb{N}$ que $(FTf')(m, \underline{k}) = f'(m, \underline{k})$.

1. $\underline{\text{Caso base}}$ Temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Tf'\,0\overline{\underline{k}} =_0 Tg'\,\overline{\underline{k}}$ e, por hipótese de indução, temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Tg'\,\overline{\underline{k}} =_0 \overline{g'(\underline{k})}$, logo $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Tf'\,0\overline{\underline{k}} =_0 \overline{g'(\underline{k})}$, onde $g'(\underline{k}) = f'(0,\underline{k})$.

2. $\underline{\text{Passo de indução}}$ Temos

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Tf'\,(\overline{m+1})\overline{\underline{k}} =_0 Th'\,\overline{m}(Tf'\,\overline{m}\overline{\underline{k}})\overline{\underline{k}}, \tag{1.18}$$

onde $\overline{m+1} \equiv S\overline{m}$. Por hipótese de indução em m, temos

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Tf'\,\overline{m}\overline{\underline{k}} =_0 \overline{f'(m,\underline{k})},$$

o que juntamente com a hipótese de indução nas funções primitivas recursivas permite concluir

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Th'\,\overline{m}(Tf'\,\overline{m}\overline{\underline{k}})\overline{\underline{k}} =_0 \overline{\underbrace{h'\big(m, f'(m,\underline{k}),\underline{k}\big)}_{=f'(m+1,\underline{k})}}\,. \tag{1.19}$$

De (1.18) e (1.19) sai, pela transitividade de $=_0$, o resultado pretendido. □

Considerámos que a função Z é uma função inicial. Podíamos ter dispensado incluí-la porque ela define-se por recursão primitiva à custa da função nulária $0 \in \mathbb{N}$ pelas condições $Z(0) = 0$ e $Z(x+1) = P_{2,2}\big(x, Z(x)\big)$. No entanto, acaba por trazer alguma simplicidade incluí-la entre as funções iniciais para adiar o uso da recursão, que tende a complicar as contas.

Vimos que se uma função f é primitiva recursiva, então é representável dentro de HA_0^ω pelo termo Tf. O recíproco é falso: existem termos t que representam funções Ft que não são primitivas recursivas. Isto deve-se à presença dos recursores de tipo superior, isto é, R_ρ com $\rho \neq 0$ (ver, por exemplo, [Kohlenbach 2007], secção 3.7).

1.6 Leis do terceiro excluído e da dupla negação para fórmulas sem quantificadores

Nesta secção provamos que para toda a fórmula sem quantificadores A_{sq} temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A_{sq} \vee \neg A_{sq}$. Esta é uma propriedade especial aritmética. A demonstração essencialmente consiste em (i) provar que para todo o termo t^0 temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash t =_0 0 \vee t \neq_0 0$ e (ii) toda a fórmula sem quantificadores é equivalente a $t =_0 0$ para um termo t apropriado. A demonstração de (i) usa indução (portanto, requer aritmética) e na demonstração de (ii) o uso da aritmética ainda é mais flagrante: usamos $+$, $\cdot$ e outras operações aritméticas. Consequência disto é termos de definir e provar propriedades dessas operações.

Lema 48. *Temos* $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall x(x =_0 0 \vee x \neq_0 0)$.

Demonstração. Seja $A(x) :\equiv x =_0 0 \lor x \neq_0 0$. Demonstramos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x)$ por indução em x. O caso base é fácil: temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash 0 =_0 0$, logo $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(0) \equiv 0 =_0 0 \lor 0 \neq_0 0$. Vejamos o passo de indução: do axioma $Sx \neq_0 0$ vem $A(Sx) \equiv Sx =_0 0 \lor Sx \neq_0 0$, logo $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x) \to A(Sx)$. □

Consideremos uma fórmula $A(x^0, y^0)$ de HA_0^ω, com $x \not\equiv y$. Suponhamos que queremos provar $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall x^0 \forall y^0 A(x,y)$, ou equivalentemente, $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x,y)$. Podemos proceder primeiro por indução em x e depois por indução em y.

1. Provamos $\forall y A(0,y)$ por indução em y. Para tal, provamos
$$A(0,0), \qquad A(0,y) \to A(0,Sy).$$
2. Provamos $\forall y A(x,y) \to \forall y A(Sx,y)$ supondo o antecedente $\forall y A(x,y)$ e provando o consequente $\forall y A(Sx,y)$ por indução em y. Para tal, provamos (com a suposição $\forall y A(x,y)$):
$$A(Sx,0), \qquad A(Sx,y) \to A(Sx,Sy).$$

Em resumo, temos a regra

$$\frac{A(0,0) \quad A(0,y) \to A(0,Sy) \quad \begin{array}{c}[\forall y A(x,y)]\\ \vdots \\ A(Sx,0)\end{array} \quad \begin{array}{c}[\forall y A(x,y)]\\ \vdots \\ A(Sx,y) \to A(Sx,Sy)\end{array}}{\forall x \forall y A(x,y)}.$$

Esta é a primeira regra de dupla indução que nos ocorre e resulta directamente de fazer primeiro indução em x e depois em y. Mas infelizmente não tem um aspecto muito simples. O lema seguinte dá-nos uma regra de dupla indução mais simples, mas que tem hipóteses mais "fortes" (a simplicidade tem um preço...).

Lema 49 (indução em n variáveis)**.** *Seja $A(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ uma fórmula de HA_0^ω onde as variáveis $x_1, \ldots, x_n$ são distintas. Temos*

$$\begin{aligned}\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \;& \forall x_2, \ldots, x_n A(0, x_2, \ldots, x_n) \land \cdots \land \forall x_1, \ldots, x_{n-1} A(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \land \\ & \forall x_1, \ldots, x_n [A(x_1, \ldots, x_n) \to A(Sx_1, \ldots, Sx_n)] \to \\ & \forall x_1, \ldots, x_n A(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Consequentemente, em HA_0^ω vale a regra

$$\frac{A(0, x_2, \ldots, x_n) \quad \ldots \quad A(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \quad A(x_1, \ldots, x_n) \to A(Sx_1, \ldots, Sx_n)}{A(x_1, \ldots, x_n)},$$

isto é,

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(0, x_2, \ldots, x_n), \ldots, A(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0), A(x_1, \ldots, x_n) \to A(Sx_1, \ldots, Sx_n) \;\Rightarrow\; \mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x_1, \ldots, x_n).$$

Demonstração. Provamos o resultado por indução em n. O caso base é simplesmente IA. Vejamos o passo de indução. A hipótese de indução é

$$\begin{gathered}\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \\ \forall x_2, \ldots, x_{n-1} A(0, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \wedge \cdots \wedge \forall x_1, \ldots, x_{n-2} A(x_1, \ldots, x_{n-2}, 0, x_n) \wedge \\ \forall x_1, \ldots, x_{n-1} [A(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \to A(Sx_1, \ldots, Sx_{n-1}, x_n)] \to \\ \forall x_1, \ldots, x_{n-1} A(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n).\end{gathered} \tag{1.21}$$

Suponhamos o antecedente de (1.20). Então temos a primeira linha de (1.21). Se provamos que temos também a segunda linha de (1.21), então temos a terceira linha, da qual vem (por x_n não ser variável livre do antecedente (1.20)) o consequente de (1.20). Portanto, resta provar que temos a segunda linha de (1.21). Fazemo-lo supondo o antecedente $A(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ e provando por indução em x_n o consequente $A(Sx_1, \ldots, Sx_{n-1}, x_n)$.

<u>Caso base</u> Temos $A(Sx_1, \ldots, Sx_{n-1}, 0)$ pela hipótese $\forall x_1, \ldots, x_{n-1} A(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$.

<u>Passo de indução</u> Queremos provar $A(Sx_1, \ldots, Sx_{n-1}, x_n) \to A(Sx_1, \ldots, Sx_{n-1}, Sx_n)$. Tal resulta de termos o consequente porque estamos a supor $A(x_1, \ldots, x_n)$ e $A(x_1, \ldots, x_n) \to A(Sx_1, \ldots, Sx_n)$.

A regra sai facilmente de (1.21). Pode no entanto ajudar fazer a seguinte observação. A regra não têm quantificações universais, ao contrário de (1.21). Assim, para provar a regra recorrendo a (1.21), é preciso introduzir as quantificações que surgem em (1.21). Fazemos isto facilmente tendo em conta que se $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash B$ (as premissas da regra são desta forma), então $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall \underline{y} B$ (onde $\underline{y}$ é um uplo qualquer de variáveis), uma vez que as variáveis $\underline{y}$ não são variáveis livres nas hipóteses abertas da derivação de B (porque tal derivação não tem sequer hipóteses abertas). $\square$

Observemos que intuitivamente a indução em n variáveis que acabámos de demonstrar acima faz sentido. Imaginemos, por exemplo, que queremos concluir $A(4, 2, 3)$ sabendo que vale

$$A(0, y, z), \qquad A(x, 0, z), \qquad A(x, y, 0), \qquad A(x, y, z) \to A(Sx, Sy, Sz).$$

Procedíamos da seguinte forma. Começávamos por às "componentes" de $A(4, 2, 3)$ subtrair o mínimo delas ($\min\{4, 2, 3\} = 2$), obtendo $A(2, 0, 1)$. Ora, $A(2, 0, 1)$ é um caso particular do caso base $A(x, 0, z)$, pelo que temos $A(2, 0, 1)$. Agora usando o passo de indução $A(x, y, z) \to A(Sx, Sy, Sz)$, tirávamos $A(3, 1, 2)$ de $A(2, 0, 1)$. Novamente pelo passo de indução, tirávamos $A(4, 2, 3)$ de $A(3, 1, 2)$, como pretendido.

Vamos agora usar a teoria construída na secção anterior para introduzir algumas operações aritméticas.

Definição 50. Definimos as funções primitivas recursivas $+$, $\cdot$, $\overline{sg}$, pd, $\dot{-}$ e $|\cdot - \cdot|$ pela seguinte tabela, onde na coluna do centro damos uma definição informal e na coluna da direita damos uma definição formal.

$+$	$\begin{aligned} x+0 &= x \\ x+(y+1) &= S(x+y) \end{aligned}$	$\begin{aligned} x+0 &= P_{1,1}(x) \\ x+(y+1) &= f_1(y,x+y,x) \\ f_1(a,b,c) &:= (S\circ P_{3,2})(a,b,c) \end{aligned}$
$\cdot$	$\begin{aligned} x\cdot 0 &= 0 \\ x\cdot(y+1) &= x\cdot y+x \end{aligned}$	$\begin{aligned} x\cdot 0 &= Z(x) \\ x\cdot(y+1) &= f_2(y,x\cdot y,x) \\ f_2(a,b,c) &:= P_{3,2}(a,b,c)+P_{3,3}(a,b,c) \end{aligned}$
$\overline{sg}$	$\begin{aligned} \overline{sg}(0) &= 1 \\ \overline{sg}(x+1) &= 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \overline{sg}(0) &= S0 \\ \overline{sg}(x+1) &= f_3\big(x,\overline{sg}(x)\big) \\ f_3(a,b) &:= (Z\circ P_{2,1})(a,b) \end{aligned}$
pd	$\begin{aligned} pd(0) &= 0 \\ pd(x+1) &= x \end{aligned}$	$\begin{aligned} pd(0) &= 0 \\ pd(x+1) &= f_4\big(x,pd(x)\big) \\ f_4(a,b) &:= P_{2,1}(a,b) \end{aligned}$
$\dot{-}$	$\begin{aligned} x\dot{-}0 &= x \\ x\dot{-}(y+1) &= pd(x\dot{-}y) \end{aligned}$	$\begin{aligned} x\dot{-}0 &= P_{1,1}(x) \\ x\dot{-}(y+1) &= f_5(y,x\dot{-}y,x) \\ f_5(a,b,c) &:= (pd\circ P_{3,2})(a,b,c) \end{aligned}$
$\lvert\cdot-\cdot\rvert$	$\lvert x-y\rvert=(x\dot{-}y)+(y\dot{-}x)$	$\begin{aligned} \lvert x-y\rvert &= f_6(x,y) \\ f_6(a,b) &:= (a\dot{-}b)+[P_{2,2}(a,b)\dot{-}P_{2,1}(a,b)] \end{aligned}$

Seja f uma das funções definidas. Como f é primitiva recursiva, então pelo teorema 47, existe um termo Tf que representa de f dentro de HA_0^ω. Por exemplo, $T{+}\,xy$ "faz as vezes" de $x+y$ em HA_0^ω. É mais agradável usar a notação usual $x+y$ em vez da notação estranha $T{+}\,xy$. Para tal, fazemos as seguintes convenções.

Notacao 51. Seja $f\in\{+,\cdot,\overline{sg},pd,\dot{-},\lvert\cdot-\cdot\rvert\}$.

1. Denotamos o termo Tf por f.

2. No caso $f\in\{+,\cdot,\dot{-}\}$, como é usual usar notação infixa para a função f (por exemplo, escrever $x+y$ em vez de $+(x,y)$), também a usaremos para o termo f. No caso da função $f=\lvert\cdot-\cdot\rvert$, como é usual escrever $\lvert x-y\rvert$ em vez de $\lvert\cdot-\cdot\rvert(x,y)$, usaremos a notação $\lvert x-y\rvert$ para $f\,xy$ (isto é, para o termo f "aplicado" a x e y).

3. Convencionamos que S tem prioridade sobre $\cdot$ que por sua vez tem prioridade sobre $+$ e sobre $\dot{-}$. Notando que f só aplica-se a termos de tipo 0, podemos omitir alguns parênteses sem criar ambiguidade. Por exemplo, $x+Sy$ tem de significar $x+(Sy)$, uma vez que não pode significar $(x+S)y$ porque S não tem tipo 0.

De seguida mostramos que as equações definidoras de $+$, $\cdot$, $\overline{sg}$, pd, $\dot{-}$ e $\lvert\cdot-\cdot\rvert$ são demonstráveis dentro de HA_0^ω.

Lema 52. *Temos*

$$\begin{array}{rl} \mathsf{HA}_0^\omega \vdash x+0 =_0 x, & \mathsf{HA}_0^\omega \vdash x+Sy =_0 S(x+y), \\ \mathsf{HA}_0^\omega \vdash x\cdot 0 =_0 0, & \mathsf{HA}_0^\omega \vdash x\cdot Sy =_0 x\cdot y + x, \\ \mathsf{HA}_0^\omega \vdash \overline{sg}\,0 =_0 S0, & \mathsf{HA}_0^\omega \vdash \overline{sg}\,Sx =_0 0, \\ \mathsf{HA}_0^\omega \vdash pd\,0 =_0 0, & \mathsf{HA}_0^\omega \vdash pd\,Sx =_0 x, \\ \mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \dot{-} 0 =_0 x, & \mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \dot{-} Sy =_0 pd(x \dot{-} y), \\ \mathsf{HA}_0^\omega \vdash |x-y| & =_0 \ (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x). \end{array}$$

Demonstração. Vamos usar repetidamente a observação 44 e o teorema 47.

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{HA}_0^\omega \vdash x+0 & =_0 & TP_{1,1}\,x \\ & \equiv & (\lambda a\,.\,a)x \\ & =_0 & x, \\ \mathsf{HA}_0^\omega \vdash x+Sy & =_0 & Tf_1\,y(x+y)x \\ & \equiv & \big[\lambda a,b,c\,.\,\big(TS\,(TP_{3,2}\,abc)\big)\big]y(x+y)x \\ & \equiv & \Big[\lambda a,b,c\,.\,\Big(S\big((\lambda a,b,c\,.\,b)abc\big)\Big)\Big]y(x+y)x \\ & =_0 & S[(\lambda a,b,c\,.\,b)y(x+y)x] \\ & =_0 & S(x+y), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{HA}_0^\omega \vdash x\cdot 0 & =_0 & TZ\,x \\ & \equiv & (\lambda a\,.\,0)x \\ & =_0 & 0, \\ \mathsf{HA}_0^\omega \vdash x\cdot Sy & =_0 & Tf_2\,y(x\cdot y)x \\ & \equiv & \big[\lambda a,b,c\,.\,\big((TP_{3,2}abc)+(TP_{3,3}abc)\big)\big]y(x\cdot y)x \\ & \equiv & \Big[\lambda a,b,c\,.\,\Big(\big((\lambda a,b,c\,.\,b)abc\big)+\big((\lambda a,b,c\,.\,c)abc\big)\Big)\Big]y(x\cdot y)x \\ & =_0 & [(\lambda a,b,c\,.\,b)\,y(x\cdot y)x]+[(\lambda a,b,c\,.\,c)y(x\cdot y)x] \\ & =_0 & x\cdot y+x, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{HA}_0^\omega \vdash \overline{sg}\,0 & =_0 & TST0 \\ & \equiv & S0, \\ \mathsf{HA}_0^\omega \vdash \overline{sg}\,Sx & =_0 & Tf_3\,x\,\overline{sg}\,x \\ & \equiv & \big[\lambda a,b\,.\,\big(TZ\,(TP_{2,1}\,ab)\big)\big]x\,\overline{sg}\,x \\ & \equiv & \Big[\lambda a,b\,.\,\Big((\lambda a\,.\,0)\big((\lambda a,b\,.\,a)ab\big)\Big)\Big]x\,\overline{sg}\,x \\ & =_0 & (\lambda a\,.\,0)[(\lambda a,b\,.\,a)x\,\overline{sg}\,x] \\ & =_0 & (\lambda a\,.\,0)x \\ & =_0 & 0, \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash pd\,0 &=_0 T0\\
&\equiv 0,\\
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash pd\,Sx &=_0 Tf_4\,x\,pd\,x\\
&\equiv (\lambda a, b\,.\,a)x\,pd\,x\\
&=_0 x,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \dot{-} 0 &=_0 TP_{1,1}\,x\\
&\equiv (\lambda a\,.\,a)x\\
&=_0 x,\\
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \dot{-} Sy &=_0 Tf_5\,y(x \dot{-} y)x\\
&\equiv \big[\lambda a, b, c\,.\,\big(pd(TP_{3,2}\,abc)\big)\big]y(x \dot{-} y)x\\
&\equiv \Big[\lambda a, b, c\,.\,\Big(pd\big((\lambda a, b, c\,.\,b)abc\big)\Big)\Big]y(x \dot{-} y)x\\
&=_0 pd\big((\lambda a, b, c\,.\,b)y(x \dot{-} y)x\big)\\
&=_0 pd(x \dot{-} y),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash |x - y| &=_0 Tf_6\,xy\\
&\equiv \lambda a, b\,.\,\big[(a \dot{-} b) + \big((TP_{2,2}\,ab) \dot{-} (TP_{2,1}\,ab)\big)\big]xy\\
&\equiv \lambda a, b\,.\,\Big[(a \dot{-} b) + \Big(\big((\lambda a, b\,.\,b)ab\big) \dot{-} \big((\lambda a, b\,.\,a)ab\big)\Big)\Big]xy\\
&=_0 (x \dot{-} y) + \big[\big((\lambda a, b\,.\,b)xy\big) \dot{-} \big((\lambda a, b\,.\,a)xy\big)\big]\\
&=_0 (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x). \quad \square
\end{aligned}
$$

Iremos demonstrar, por indução na complexidade das fórmulas, que toda a fórmula sem quantificadores A_{sq} é equivalente a uma fórmula $t =_0 0$ para um certo termo t. No passo de indução, uma das situações que teremos de tratar é dados (por hipótese de indução) termos t e q tais que as fórmulas sem quantificadores A_{sq} e B_{sq} são equivalentes a $t =_0 0$ e $q =_0 0$, respectivamente, construir um termo r tal que $A \vee B$ seja equivalente a $r =_0 0$. Ora, $A \vee B$ equivale a $t =_0 0 \vee q =_0 0$, o que é de esperar que seja equivalente a $t \cdot q =_0 0$, pelo que tomamos $r :\equiv t \cdot q$. Mas para a equivalência $A_{sq} \vee B_{sq} \leftrightarrow t \cdot q =_0 0$ ser demonstrável dentro de HA_0^ω é preciso que HA_0^ω demonstre $t \cdot q =_0 0 \leftrightarrow t =_0 0 \vee q =_0 0$. O próximo lema prova esta e outras propriedades necessárias.

Lema 53. *Temos*

1. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x + y =_0 0 \leftrightarrow x =_0 0 \wedge y =_0 0$;

2. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \cdot y =_0 0 \leftrightarrow x =_0 0 \vee y =_0 0$;

3. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \overline{sg}\,x =_0 0 \leftrightarrow x \neq_0 0$;

4. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (\overline{sg}\, x) \cdot y =_0 0 \leftrightarrow (x =_0 0 \to y =_0 0)$*;*

5. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash pd(Sx \dot- y) =_0 x \dot- y$*;*

6. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash |x - y| =_0 0 \leftrightarrow x =_0 y$*.*

Demonstração. Vamos usar repetidamente o lema 52.

1. Seja $A(x, y) :\equiv x + y =_0 0 \leftrightarrow x =_0 0 \wedge y =_0 0$. Demonstramos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x, y)$ por dupla indução (ver lema 49).

$\underline{\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x, 0)}$ Temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x + 0 =_0 x$. Usando este facto é fácil provar $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x, 0)$.

$\underline{\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(0, y)}$ Começamos por provar $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash B(y) :\equiv 0 + y =_0 y$ por indução em y. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash B(0)$ resulta de $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x + 0 =_0 x$ substituindo x por 0. Provamos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash B(y) \to B(Sy)$ supondo $B(y)$, substituindo x por 0 em $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x + Sy =_0 S(x + y)$ e usando a hipótese $B(y)$ para depois substituir $0 + y$ por y.
Sabendo $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash B(y)$, provamos facilmente $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(0, y)$.

$\underline{\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x, y) \to A(Sx, Sy)}$ $A(Sx, Sy)$ é $Sx + Sy =_0 0 \leftrightarrow Sx =_0 0 \wedge Sy =_0 0$. Basta provarmos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Sx + Sy \neq_0 0$ e $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg(Sx =_0 0 \wedge Sy =_0 0)$. A primeira resulta de $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Sx + Sy =_0 S(Sx + y)$ e $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash S(Sx + y) \neq_0 0$ e a segunda resulta de $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Sx \neq_0 0$ (ou de $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Sy \neq_0 0$).

2. Seja $A(x, y) :\equiv x \cdot y =_0 0 \leftrightarrow x =_0 0 \vee y =_0 0$. Demonstramos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x, y)$ por dupla indução.

$\underline{\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x, 0)}$ Temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \cdot 0 =_0 0$ e $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x =_0 0 \vee 0 =_0 0$, logo $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x, 0)$.

$\underline{\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(0, y)}$ Vamos provar por indução em y que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash B(y) :\equiv 0 \cdot y =_0 0$. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash B(0)$ vem de $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \cdot 0 =_0 0$ substituindo x por 0. Provamos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash B(y) \to B(Sy)$ supondo $B(y)$, substituindo x por 0 em $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \cdot Sy =_0 x \cdot y + x$ e usando $B(y)$ para substituir depois $0 \cdot y$ por 0 e finalmente atendendo a que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash 0 + 0 =_0 0$.
Sabendo agora que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash B(y)$, provamos facilmente $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(0, y)$.

$\underline{\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x, y) \to A(Sx, Sy)}$ $A(Sx, Sy)$ é $Sx \cdot Sy =_0 0 \leftrightarrow Sx =_0 0 \vee Sy =_0 0$. Basta provarmos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Sx \cdot Sy \neq_0 0$ e $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg(Sx =_0 0 \vee Sy =_0 0)$. A primeira provamos atendendo a $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Sx \cdot Sy =_0 Sx \cdot y + Sx =_0 S(Sx \cdot y + x) \neq_0 0$ e a segunda atendendo a $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Sx \neq_0 0$ e $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Sy \neq_0 0$.

3. Demonstramos esta alínea facilmente por indução em x, atendendo a $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \overline{sg}\, 0 =_0 S0$, $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash S0 \neq_0 0$, $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \overline{sg}\, Sx =_0 0$ e $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Sx \neq_0 0$.

4. Pela alínea 2 temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (\overline{sg}\, x) \cdot y =_0 0 \leftrightarrow \overline{sg}\, x =_0 0 \vee y =_0 0$. Por isso basta provarmos que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \overline{sg}\, x =_0 0 \vee y =_0 0 \leftrightarrow (x =_0 0 \to y =_0 0)$.
Provemos a implicação da esquerda para a direita. Suponhamos $\overline{sg}\, x =_0 0 \vee y =_0 0$. Se for $\overline{sg}\, x =_0 0$, então pela alínea 3 temos $x \neq_0 0$, logo a implicação $x =_0 0 \to y =_0 0$ é derivável porque tem antecedente "falso". Se for $y =_0 0$, então a mesma implicação é derivável porque tem consequente "verdadeiro".
Provemos a implicação da direita para a esquerda. Suponhamos $x =_0 0 \to y =_0 0$.

Pela lema 48 temos $x =_0 0 \vee x \neq_0 0$. Se for $x =_0 0$, então temos $y =_0 0$. Se for $x \neq_0 0$, então pela alínea 3 temos $\overline{sg}\, x =_0 0$.

5. Vamos provar $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(y) :\equiv pd(Sx \dot{-} y) =_0 x \dot{-} y$ por indução em y.

$\underline{\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(0)}$ Temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash pd(Sx \dot{-} 0) =_0 pd\, Sx =_0 x =_0 x \dot{-} 0$.

$\underline{\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(y) \to A(Sy)}$ Supomos $A(y)$ e provarmos $A(Sy)$ calculando $pd(Sx \dot{-} Sy) =_0 pd[pd(Sx \dot{-} y)] =_0 pd(x \dot{-} y) =_0 x \dot{-} Sy$, onde na primeira igualdade usámos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Sx \dot{-} Sy =_0 pd(Sx \dot{-} y)$ e na segunda igualdade usámos $A(y)$.

6. Seja $A(x, y) :\equiv |x - y| =_0 0 \leftrightarrow x =_0 y$. Demonstramos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x, y)$ por dupla indução.

$\underline{\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x, 0)}$ Provamos por indução em x que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash 0 \dot{-} x =_0 0$: no caso $x =_0 0$ temos $0 \dot{-} 0 =_0 0$; para Sx temos $0 \dot{-} Sx =_0 pd(0 \dot{-} x) =_0 pd\, 0 =_0 0$ usando a hipótese de indução $0 \dot{-} x =_0 0$. Então

$$\begin{aligned} \mathsf{HA}_0^\omega \vdash |x - 0| &=_0 (x \dot{-} 0) + (0 \dot{-} x) \\ &=_0 (x \dot{-} 0) + 0 \\ &=_0 x \dot{-} 0 \\ &=_0 x, \end{aligned}$$

logo $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x, 0) \equiv |x - 0| =_0 0 \leftrightarrow x =_0 0$.

$\underline{\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(0, y)}$ Análogo ao caso anterior.

$\underline{\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x, y) \to A(Sx, Sy)}$ Se provarmos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash |Sx - Sy| =_0 |x - y|$, então torna-se fácil provar $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x, y) \to A(Sx, Sy)$. Atendendo à alínea 5, temos

$$\begin{aligned} \mathsf{HA}_0^\omega \vdash |Sx - Sy| &=_0 (Sx \dot{-} Sy) + (Sy \dot{-} Sx) \\ &=_0 [pd(Sx \dot{-} y)] + [pd(Sy \dot{-} x)] \\ &=_0 (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x) \\ &=_0 |x - y|. \quad \square \end{aligned}$$

O próximo lema diz-nos que toda a fórmula sem quantificadores A_{sq} pode ser codificada num termo $t_{A_{sq}}$, no sentido: $t_{A_{sq}} =_0 0 \leftrightarrow A_{sq}$. Dele resulta já uma conclusão interessante: toda a fórmula sem quantificadores é equivalente a uma fórmula atómica.

Lema 54. *Para toda a fórmula sem quantificadores A_{sq} de HA_0^ω, existe um termo $t_{A_{sq}}$ de tipo 0 tal que $FV(t) = FV(A_{sq})$ e $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash t_{A_{sq}} =_0 0 \leftrightarrow A_{sq}$. O termo $t_{A_{sq}}$ é definido por indução na complexidade das fórmulas sem quantificadores pelas cláusulas*

$$\begin{aligned} t_{p =_0 q} &:\equiv |p - q|, \\ t_{B \wedge C} &:\equiv t_B + t_C, \\ t_{B \vee C} &:\equiv t_B \cdot t_C, \\ t_{B \to C} &:\equiv (\overline{sg}\, t_B) \cdot t_C, \end{aligned}$$

onde p e q são termos de HA_0^ω e A e B são fórmulas sem quantificadores de HA_0^ω. Em particular, toda a fórmula sem quantificadores é equivalente a uma fórmula atómica.

Demonstração. Fazemos facilmente a demonstração por indução na complexidade das fórmulas sem quantificadores, usando o lema 53. □

Finalmente, o resultado principal desta secção: em HA_0^ω, LEM e LDN valem para fórmulas sem quantificadores.

Teorema 55 (LEM e LDN para fórmulas sem quantificadores)**.** *Para toda a fórmula sem quantificadores A_{sq} de HA_0^ω temos:*

1. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A_{sq} \vee \neg A_{sq}$;
2. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg\neg A_{sq} \to A_{sq}$.

Demonstração.

1. Pelo lema 54 temos um termo $t_{A_{sq}}$ tal que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash t_{A_{sq}} =_0 0 \leftrightarrow A_{sq}$. Pelo lema 48 temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash t_{A_{sq}} =_0 0 \vee t_{A_{sq}} \neq_0 0$. Destes dois factos vem o resultado: se for $t_{A_{sq}} =_0 0$, então temos A_{sq}; se for $t_{A_{sq}} \neq_0 0$, então pelo contra-recíproco $t_{A_{sq}} \neq_0 0 \to \neg A_{sq}$ de $A_{sq} \to t_{A_{sq}} =_0 0$ vem $\neg A_{sq}$.

2. Temos a seguinte derivação de $\neg\neg A_{sq} \to A_{sq}$ usando $A_{sq} \vee \neg A_{sq}$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A_{sq} \vee \neg A_{sq}$}
\AxiomC{$[A_{sq}]$}
\RightLabel{$\to\mathsf{I}$}
\UnaryInfC{$\neg\neg A_{sq} \to A_{sq}$}
\AxiomC{$[\neg A_{sq}]$}
\AxiomC{$[\neg\neg A_{sq}]$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{$\perp$}
\UnaryInfC{A_{sq}}
\RightLabel{$\to I$}
\UnaryInfC{$\neg\neg A_{sq} \to A_{sq}$}
\RightLabel{$\vee\mathsf{E}$}
\TrinaryInfC{$\neg\neg A_{sq} \to A_{sq}$}
\end{prooftree}
$$

□

1.7 Definição de termos por casos

No teorema seguinte usamos a teoria já desenvolvida para mostrar que, dada uma fórmula sem quantificadores $A_{sq}(\underline{x})$ e um par de termos q_1 e q_2 (do mesmo tipo), podemos definir um termo $t(\underline{x})$ cujo comportamento depende de $A_{sq}(\underline{x})$:

$$
t(\underline{x}) = \begin{cases} q_1 & \text{se} \quad A_{sq}(\underline{x}) \\ q_2 & \text{se} \quad \neg A_{sq}(\underline{x}) \end{cases} .
$$

Convém no entanto esclarecemos o significado de "depender de $A_{sq}(\underline{x})$".

Não estamos a dizer que definimos o termo $t(\underline{x})$ segundo os critérios

$$
\begin{aligned}
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A_{sq}(\underline{x}) \quad &\Rightarrow \quad t(\underline{x}) :\equiv q_1, \\
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg A_{sq}(\underline{x}) \quad &\Rightarrow \quad t(\underline{x}) :\equiv q_2.
\end{aligned}
$$

Isto seria algo que (i) passava-se fora de HA_0^ω (notemos o símbolo $\Rightarrow$) e (ii) uma vez definido se era $t(\underline{x}) :\equiv q_1$ ou $t(\underline{x}) :\equiv q_2$, se as variáveis $\underline{x}$ alterassem-se para $\underline{x'}$ e isso alterasse a situação de, por exemplo, $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A_{sq}(\underline{x})$ para $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg A_{sq}(\underline{x'})$, o termo t podia não acompanhar esta alteração (de $t(\underline{x}) \equiv q_1$ não se segue necessariamente que $t(\underline{x'}) \equiv q_2$).

Estamos sim a dizer que

$$\begin{aligned} \mathsf{HA}_0^\omega \vdash A_{sq}(\underline{x}) &\quad\to\quad t(\underline{x}) = q_1, \\ \mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg A_{sq}(\underline{x}) &\quad\to\quad t(\underline{x}) = q_2, \end{aligned}$$

onde $t(\underline{x}) = q_i$ é uma abreviatura para $B[t(\underline{x})/w] \leftrightarrow B[q_i/w]$ (informalmente, significa que $t(\underline{x})$ é o mesmo, ou melhor, porta-se da mesma forma, que q_i). Isto já é algo que (i$'$) passa-se dentro de HA_0^ω (notemos o símbolo $\to$) e (ii$'$) o termo t actualiza automaticamente o seu comportamento para acompanhar as mudanças de $\underline{x}$, isto é, se por exemplo $\underline{x}$ alterasse-se para $\underline{x'}$, mudando a situação de $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A_{sq}(\underline{x})$ para $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg A_{sq}(\underline{x'})$, então o termo t acompanhava esta alteração mudando o seu comportamento de $t(\underline{x}) = q_1$ para $t(\underline{x'}) = q_2$.

Teorema 56 (definição de termos por casos)**.** *Sejam A_{sq} uma fórmula sem quantificadores de HA_0^ω e $(\underline{q_1})^{\underline{\rho}}$ e $(\underline{q_2})^{\underline{\rho}}$ uplos termos de HA_0^ω. Existe um uplo de termos $\underline{t}^{\underline{\rho}}$ de HA_0^ω tal que $FV(\underline{t}) = FV(A_{sq}) \cup FV(\underline{q_1}) \cup FV(\underline{q_2})$ e para toda a fórmula $B(\underline{w}^{\underline{\rho}})$ de HA_0^ω temos*

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \big[A_{sq} \to (B[\underline{t}/\underline{w}] \leftrightarrow B[\underline{q_1}/\underline{w}])\big] \wedge \big[\neg A_{sq} \to (B[\underline{t}/\underline{w}] \leftrightarrow B[\underline{q_2}/\underline{w}])\big].$$

Demonstração. Seja $\underline{t'} :\equiv \underline{R}_{\underline{\rho}} x^0 \underline{q_1} \lambda \underline{u}^{\underline{\rho}}, v^0 \,.\, \underline{q_2}$, onde $x, u, v \notin FV(\underline{q_1}) \cup FV(\underline{q_2})$. Temos

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x =_0 0 \to (B[\underline{t'}/\underline{w}] \leftrightarrow B[\underline{q_1}/\underline{w}])$$

e, atendendo a $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \neq_0 0 \to x =_0 S(pd\, x)$ (o que provamos por indução em x atendendo ao lema 52), temos

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \neq_0 0 \to (B[\underline{t'}/\underline{w}] \leftrightarrow B[\underline{q_2}/\underline{w}]).$$

Pelo lema 54, consideremos um termo $t_{A_{sq}}$ tal que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash t_{A_{sq}} =_0 0 \leftrightarrow A_{sq}$. Os termos $\underline{t} :\equiv \underline{t'}[t_{A_{sq}}/x]$ estão nas condições pretendidas. $\square$

1.8 Princípios

Nesta secção apresentamos de uma assentada os princípios lógicos de que vamos precisar no resto da primeira parte da tese.

Em teoria dos conjuntos, uma das formulações possíveis do axioma da escolha diz que se $(C_x)_x$ é uma família de conjuntos não vazios indexada em x (subentendemos que x varia num certo conjunto de índices), então existe uma função $Y(x)$ satisfazendo $\forall x[Y(x) \in C_x]$, a que chamamos função de escolha. Denotemos por $A(x,y)$ a condição $y \in C_x$. Então o axioma da escolha pode ser expresso pela implicação $\forall x \exists y A(x,y) \to \exists Y \forall x A\big(x, Y(x)\big)$, na qual o antecedente expressa que todos os C_x são não vazios e o consequente expressa que existe uma função de escolha Y.

Definição 57. Chamamos *axioma da escolha* a

$$\mathsf{AC}: \quad \forall x^\rho \exists y^\tau A(x,y) \to \exists Y^{\tau\rho} \forall x^\rho A(x, Yx),$$

(AC vem do inglês *axiom of choice*) onde A é uma fórmula arbitrária de HA_0^ω.

Observação 58. Por aplicação sucessiva de AC, obtemos uma versão do axioma da escolha para uplos de variáveis:

$$\forall \underline{x}^{\underline{\rho}} \exists \underline{y}^{\underline{\tau}} A(\underline{x}, \underline{y}) \to \exists \underline{Y}^{\underline{\tau}\underline{\rho}^t} \forall \underline{x}^{\underline{\rho}} A(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x})$$

onde $\underline{x} = x_1^{\rho_1}, \dots, x_k^{\rho_k}$, $\underline{y} = y_1^{\tau_1}, \dots, y_n^{\tau_n}$ e $\underline{Y} = Y_1^{\tau_1\rho_k\cdots\rho_1}, \dots, Y_n^{\tau_n\rho_k\cdots\rho_1}$.

Definição 59. Chamamos *axioma da escolha sem quantificadores* a

$$\mathsf{QF\text{-}AC}: \quad \forall \underline{x}^{\underline{\rho}} \exists \underline{y}^{\underline{\tau}} A_{sq}(\underline{x}, \underline{y}) \to \exists \underline{Y}^{\underline{\tau}\underline{\rho}^t} \forall \underline{x}^{\underline{\rho}} A_{sq}(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}),$$

($\mathsf{QF\text{-}AC}$ vem do inglês *quantifier-free axiom of choice*) onde A_{sq} é uma fórmula sem quantificadores de HA_0^ω,$\underline{x} = x_1^{\rho_1}, \dots, x_k^{\rho_k}$,$\underline{y} = y_1^{\tau_1}, \dots, y_k^{\tau_n}$ e$\underline{Y} = Y_1^{\tau_1\rho_k\cdots\rho_1}, \dots, Y_n^{\tau_n\rho_k\cdots\rho_1}$.

Observação 60. Ao contrário do que acontece para AC (ver observação 58), a tentativa de demonstrar $\mathsf{QF\text{-}AC}$ por aplicação sucessiva da versão de $\mathsf{QF\text{-}AC}$ para uma só variável não funciona (por esta razão, enunciamos $\mathsf{QF\text{-}AC}$ para uplos de variáveis). Por exemplo, não conseguimos aplicar a versão para uma só variável a

$$\forall x_1, x_2 \exists y_1, y_2 A_{sq}(x_1, x_2, y_1, y_2).$$

Não podemos passar para

$$\exists Y_1 \forall x_1, x_2 \exists y_2 A_{sq}(x_1, x_2, Y_1 x_1 x_2, y_2)$$

porque a fórmula $\exists y_2 A_{sq}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ tem quantificadores, e não podemos passar para

$$\exists Y_2 \forall x_1, x_2 \exists y_1 A_{sq}(x_1, x_2, y_1, Y_2 x_1 x_2)$$

porque há a quantificação $\exists y_1$ entre $\forall x_1, x_2$ e $\exists y_2$.

O princípio da independência das premissas diz, informalmente, que se a partir de uma premissa A conseguimos produzir um y que testemunhe $\exists y B$, então esse y pode ser produzido de forma independente da premissa A, isto é, $\exists y(A \to B)$.

Definição 61. Chamamos *princípio da independência das premissas para fórmulas universais puras* a

$$\mathsf{IP}: \quad (\forall \underline{x} A_{sq} \to \exists y B) \to \exists y(\forall \underline{x} A_{sq} \to B),$$

onde A_{sq} é uma fórmula sem quantificadores de HA_0^ω, B é uma fórmula arbitrária de HA_0^ω e $\underline{y} \notin FV(\forall \underline{x} A_{sq})$.

O princípio da independência das premissas para fórmulas universais puras é um caso particular da regra de prenifixação

$$(A \to \exists x B) \to \exists x(A \to B) \qquad (x \notin FV(A)),$$

regra esta que não é intuicionisticamente válida. Para além desta regra, há só mais três regras de prenifixação que não são intuicionisticamente válidas:

$$\begin{array}{rl} (\forall x A \to B) \to \exists x(A \to B) & \quad (x \notin FV(B)), \\ \forall x(A \vee B) \to \forall x A \vee B & \quad (x \notin FV(B)), \\ \forall x(A \vee B) \to A \vee \forall x B & \quad (x \notin FV(A)). \end{array}$$

O princípio de Markov que apresentamos de seguida é um caso particular de LDN. Ele pode ser reformulado de forma equivalente como um caso particular de uma das leis da negação dos quantificadores.

Definição 62. Chamamos *princípio de Markov* a

$$\mathsf{M}: \quad \neg\neg\exists \underline{x} A_{sq} \to \exists \underline{x} A_{sq},$$

onde A_{sq} é uma fórmula sem quantificadores de HA_0^ω.

Observação 63. O princípio de Markov é equivalente a

$$\mathsf{M}': \quad \neg\forall \underline{x} A_{sq} \to \exists \underline{x} \neg A_{sq},$$

(onde A_{sq} é uma fórmula sem quantificadores de HA_0^ω) no seguinte sentido: $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{M} = \mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{M}'$. Para o verificarmos usamos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg\exists \underline{x} B \leftrightarrow \forall \underline{x} \neg B$ (o que provamos primeiro para uma só variável x usando prenifixação e depois generalizamos a um uplo de variáveis $\underline{x}$ por aplicação sucessiva do resultado para uma só variável).

Originalmente o princípio de Markov referia-se apenas a variáveis de tipo 0. Com essa restrição, podemos dar-lhe alguma justificação intuitiva. Assumindo $\neg\forall n B(n)$, então testando sucessivamente $B(n)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ temos de encontrar um n tal que $\neg B(n)$, caso contrário teríamos $\forall n B(n)$. Portanto, temos $\exists n \neg B(n)$. Notemos que é essencial n ter tipo 0 para que corresponda aos números naturais, que podem ser ordenados, permitindo assim um teste sucessivo.

Capítulo 2

Interpretação funcional de Gödel

Pretendemos associar a cada fórmula A de HA_0^ω uma fórmula $A^D \equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y})$ onde A_D não tem quantificadores, de tal forma que A e A^D tenham alguma relação intuicionista (isto é, ainda que $\mathsf{HA}_0^\omega \nvdash A \leftrightarrow A^D$, pelo menos $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{P} \vdash A \leftrightarrow A^D$ para alguns princípios P não muito distantes da lógica intuicionista). No caso de A ser atómica, a forma natural de A_D não ter quantificadores é pôr $A^D \equiv A$ (portanto $\underline{x}$ e $\underline{y}$ são os uplos vazios e $A_D \equiv A$). Suponhamos que já definimos $A^D \equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y})$ e $B^D \equiv \exists \underline{x'} \forall \underline{y'} B_D(\underline{x'}, \underline{y'})$. Então em $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC}$ temos

$$
\begin{array}{rcl}
A^D \wedge B^D & \leftrightarrow & \exists \underline{x}, \underline{x'} \forall \underline{y}, \underline{y'} [A_D(\underline{x}, \underline{y}) \wedge B_D(\underline{x'}, \underline{y'})], \\
\forall z A^D & \leftrightarrow & \exists \underline{X} \forall z, \underline{y} A_D(\underline{X} z, \underline{y}), \\
\exists z A^D & \equiv & \exists z, \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}),
\end{array}
$$

onde na primeira equivalência usámos prenifixação e na segunda equivalência usámos $\mathsf{QF\text{-}AC}$. Estas equivalências sugerem que definamos $(A \wedge B)^D$, $(\forall z A)^D$ e $(\exists z A)^D$ como sendo os respectivos membros direitos acima.

Quanto à disjunção, o mais natural seria definir

$$(A \vee B)^D \equiv \exists \underline{x}, \underline{x'} \forall \underline{y}, \underline{y'} [A_D(\underline{x}, \underline{y}) \vee B_D(\underline{x'}, \underline{y'})],$$

mas optamos por outra definição pois caso contrário no teorema da correcção (que veremos adiante) não podíamos garantir que os termos $\underline{t}$ fossem fechados. Depois de demonstrarmos o teorema veremos em pormenor esta questão. Vamos optar por definir

$$(A \vee B)^D :\equiv \exists z^0, \underline{x}, \underline{x'} \forall \underline{y}, \underline{y'} \big[\big(z =_0 0 \to A_D(\underline{x}, \underline{y})\big) \wedge \big(z \neq_0 0 \to B_D(\underline{x'}, \underline{y'})\big)\big].$$

Notemos que a variável z decide se temos A_D ou B_D. Este aspecto é fundamental na demonstração de que $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{AC} + \mathsf{IP} + \mathsf{M}$ decide as disjunções, como veremos no teorema 76.

Resta escolher a forma como definimos $(A \to B)^D$. Vamos apresentar duas motivações, a primeira mais técnica e a segunda mais "filosófica".

$\underline{\text{Motivação 1}}$ Nesta motivação seguimos de perto [Kohlenbach 2007], secção 8.1. $\overline{A^D \to B^D}$ é

$$(1) \quad \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to \exists \underline{x}' \forall \underline{y}' B_D(\underline{x}', \underline{y}'),$$

e queremos pôr esta fórmula na forma $\exists \underline{u} \forall \underline{v}(\ldots)$. Para isso usamos prenifixação, escolhendo a forma como optamos por fazer a prenifixação de modo que se afaste o menos possível da lógica intuicionista. De (1) há dois caminhos possíveis para iniciar a prenifixação:

$$(1) \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{ll} (1.1) & \forall \underline{x}[\forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to \exists \underline{x}' \forall \underline{y}' B_D(\underline{x}', \underline{y}')] \\ (1.2) & \exists \underline{x}'[\exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to \forall \underline{y}' B_D(\underline{x}', \underline{y}')] \end{array} \right. .$$

A passagem (1) $\rightsquigarrow$ (1.1) é intuicionista, enquanto (1) $\rightsquigarrow$ (1.2) não o é (nem vale em $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{IP} + \mathsf{M}$), pelo que escolhemos a primeira. De (1.1) há dois caminhos possíveis:

$$(1.1) \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{ll} (1.1.1) & \forall \underline{x} \exists \underline{x}'[\forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to \forall \underline{y}' B_D(\underline{x}', \underline{y}')] \\ (1.1.2) & \forall \underline{x} \exists \underline{y}[A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to \exists \underline{x}' \forall \underline{y}' B_D(\underline{x}', \underline{y}')] \end{array} \right. .$$

Escolhemos a passagem (1.1) $\rightsquigarrow$ (1.1.1), que usa IP, porque IP tem alguma justificação intuicionista (ver [Kohlenbach 2007], capítulo 5). De (1.1.1) há dois caminhos possíveis:

$$(1.1.1) \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{ll} (1.1.1.1) & \forall \underline{x} \exists \underline{x}' \forall \underline{y}' \exists \underline{y}[A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to B_D(\underline{x}', \underline{y}')] \\ (1.1.1.2) & \forall \underline{x} \exists \underline{x}' \exists \underline{y} \forall \underline{y}'[A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to B_D(\underline{x}', \underline{y}')] \end{array} \right. .$$

A passagem (1.1.1) $\rightsquigarrow$ (1.1.1.1) pode ser decomposta duas subpassagens,

$$(1.1.1) \rightsquigarrow \forall \underline{x} \exists \underline{x}' \forall \underline{y}' \neg\neg \exists \underline{y}[A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to B_D(\underline{x}', \underline{y}')] \rightsquigarrow (1.1.1.1),$$

a primeira delas intuicionista (embora seja difícil de derivar; ver [Kohlenbach 2007], secção 8.3) e a segunda usando M. Se tentarmos decompor a passagem (1.1.1) $\rightsquigarrow$ (1.1.1.2) de forma análoga, obtemos

$$(1.1.1) \rightsquigarrow \forall \underline{x} \exists \underline{x}' \neg\neg \exists \underline{y} \forall \underline{y}'[A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to B_D(\underline{x}', \underline{y}')] \rightsquigarrow (1.1.1.2),$$

e agora já nem M nos vale para eliminarmos a dupla negação devido aos quantificadores $\forall \underline{y}'$ na matriz de $\exists \underline{y}$. Portanto, escolhemos a passagem (1.1.1) $\rightsquigarrow$ (1.1.1.1). Finalmente, a (1.1.1.1) aplicamos AC obtermos uma fórmula da forma $\exists \underline{u} \forall \underline{v}(\ldots)$:

$$\exists \underline{X}', \underline{Y} \forall \underline{x}, \underline{y}'[A_D(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}\,\underline{y}') \to B_D(\underline{X}'\underline{x}, \underline{y}')].$$

Tomamos esta última fórmula como definição de $(A \to B)^D$.

$\underline{\text{Motivação 2}}$ Apresentamos agora uma motivação dada pelo próprio Gödel em $\overline{\text{[Gödel 1941]}}$. O significado intuicionista de $A^D \to B^D$, isto é,

$$\exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to \exists \underline{x}' \forall \underline{y}' B_D(\underline{x}', \underline{y}')$$

é: dado um $\underline{x}$ tal que $\forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y})$, conseguimos construir um $\underline{x}'$ tal que $\forall \underline{y}' B_D(\underline{x}', \underline{y}')$. Sendo $\underline{X}'$ essa construção, tal significa:

$$\exists \underline{X}' \forall \underline{x} [\forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to \forall \underline{y}' B_D(\underline{X}' \underline{x}, \underline{y}')].$$

A interpretação intuicionista de $\forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to \forall \underline{y}' B_D(\underline{X}' \underline{x}, \underline{y}')$ é: dado um contra--exemplo $\underline{y}'$ de $B_D(\underline{X}'\underline{x}, \underline{y}')$, conseguimos construir um contra-exemplo $\underline{y}$ de $A_D(\underline{x}, \underline{y})$. Sendo $\underline{\hat{Y}}$ essa construção, tal significa:

$$\exists \underline{X}' \forall \underline{x} \exists \underline{\hat{Y}} \forall \underline{y}' [\neg B_D(\underline{X}' \underline{x}, \underline{y}') \to \neg A_D(\underline{x}, \underline{\hat{Y}}\, \underline{y}')].$$

Como nesta última fórmula a implicação aplica-se a fórmulas sem quantificadores (para as quais vale LDN) vem

$$\exists \underline{X}' \forall \underline{x} \exists \underline{\hat{Y}} \forall \underline{y}' [A_D(\underline{x}, \underline{\hat{Y}}\, \underline{y}') \to B_D(\underline{X}' \underline{x}, \underline{y}')].$$

Finalmente, dizer que para todo o $\underline{x}$ existe uma construção $\underline{\hat{Y}}$ significa que essa construção está dependente de $\underline{x}$:

$$\exists \underline{X}', \underline{Y} \forall \underline{x}, \underline{y}' [A_D(\underline{x}, \underline{Y}\, \underline{x}\, \underline{y}') \to B_D(\underline{X}' \underline{x}, \underline{y}')].$$

Chegámos a $(A \to B)^D$.

Definição 64. Para cada fórmula A de HA_0^ω definimos duas fórmulas A^D e A_D de HA_0^ω, a primeira dela chamada *interpretação funcional de Gödel* de A ou *interpretação Dialectica* de A, relacionadas por $A^D :\equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y})$, por indução na complexidade das fórmulas.

1. Se A é fórmula atómica, então $A^D :\equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D :\equiv A$, onde $\underline{x}$ e $\underline{y}$ são uplos vazios.

Suponhamos que já definimos $A^D \equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y})$ e $B^D \equiv \exists \underline{x}' \forall \underline{y}' B_D(\underline{x}', \underline{y}')$. Então:

2. $(A \wedge B)^D :\equiv \exists \underline{x}, \underline{x}' \forall \underline{y}, \underline{y}' (A \wedge B)_D(\underline{x}, \underline{x}', \underline{y}, \underline{y}') :\equiv$
   $\exists \underline{x}, \underline{x}' \forall \underline{y}, \underline{y}' [A_D(\underline{x}, \underline{y}) \wedge B_D(\underline{x}', \underline{y}')]$;

3. $(A \vee B)^D :\equiv \exists z^0, \underline{x}, \underline{x}' \forall \underline{y}, \underline{y}' (A \vee B)_D(z, \underline{x}, \underline{x}', \underline{y}, \underline{y}') :\equiv$
   $\exists z^0, \underline{x}, \underline{x}' \forall \underline{y}, \underline{y}' \big[\big(z =_0 0 \to A_D(\underline{x}, \underline{y})\big) \wedge \big(z \neq_0 0 \to B_D(\underline{x}', \underline{y}')\big)\big]$;

4. $(A \to B)^D :\equiv \exists \underline{X}', \underline{Y} \forall \underline{x}, \underline{y}' (A \to B)^D(\underline{X}', \underline{Y}, \underline{x}, \underline{y}') :\equiv$
   $\exists \underline{X}', \underline{Y} \forall \underline{x}, \underline{y}' [A_D(\underline{x}, \underline{Y}\, \underline{x}\, \underline{y}') \to B_D(\underline{X}' \underline{x}, \underline{y}')]$;

5. $(\exists z A)^D :\equiv \exists z, \underline{x} \forall \underline{y} (\exists z A)_D(z, \underline{x}, \underline{y}) :\equiv \exists z, \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y})$;

6. $(\forall z A)^D :\equiv \exists \underline{X} \forall z, \underline{y} (\forall z A)_D(\underline{X}, z, \underline{y}) :\equiv \exists \underline{X} \forall z, \underline{y} A_D(\underline{X} z, \underline{y})$.

Numa interpretação $A^D \equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y})$, supomos que as variáveis $\underline{x}, \underline{y}$ são distintas e não ocorrem livres em A.

Notacao 65. Apesar de D ter o nome *interpretação funcional de Gödel* ou *interpretação Dialectica*, vamos frequentemente referi-la por D-tradução. Regra geral, faremos isso a todas as traduções (mais à frente falaremos das Ku-tradução, Kr-tradução, S-tradução, etc.).

Notacao 66. Convencionamos que D tem prioridade sobre todos os símbolos lógicos. Por exemplo, $\neg A^D$ significa $\neg(A^D)$, *não* significa $(\neg A)^D$. Adoptamos esta convenção para todas as traduções.

Observação 67. Ao calcularmos, por exemplo, $(A \wedge A)^D$, encaramos estes dois A's como tendo D-traduções com variáveis distintas: digamos que o primeiro A tem D-tradução $(A_1)^D \equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y})$ e o segundo A tem D-tradução $(A_2)^D \equiv \exists \underline{x}' \forall \underline{y}' A_D(\underline{x}', \underline{y}')$, onde as variáveis $\underline{x}$, $\underline{x}'$, $\underline{y}$, $\underline{y}'$ são distintas. Então $(A \wedge A)^D$ será $(A_1 \wedge A_2)^D \equiv \exists \underline{x}, \underline{x}' \forall \underline{y}, \underline{y}' [A_D(\underline{x}, \underline{y}) \wedge A_D(\underline{x}', \underline{y}')]$. Isto é, renomeamos as variáveis $\underline{x}, \underline{y}$ para $\underline{x}', \underline{y}'$ de forma a que as variáveis $\underline{x}, \underline{y}$ de $(A_1)^D$ sejam distintas das variáveis $\underline{x}', \underline{y}'$ de $(A_2)^D$, cumprindo desta forma a exigência descrita na última frase da definição 64. Mas só fazemos isto às variáveis $\underline{x}$, $\underline{y}$: outras variáveis que possam ocorrer em A e que não estejam entre $\underline{x}$, $\underline{y}$ não são renomeadas. Esta é uma prática comum às interpretações funcionais.

Observação 68. Pode ajudar o cálculo da D-tradução de fórmulas usar as seguintes mnemónicas para $(A \to B)^D$ e $(\forall z A)^D$.

<u>Mnemónica para $(A \to B)^D$</u> Primeiro escrevemos a implicação $A \to B$ com A^D no lugar de A e B^D no lugar de B:

$$\exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to \exists \underline{x}' \forall \underline{y}' A_D(\underline{x}', \underline{y}').$$

Depois usando as regras de prenifixação "passamos para fora" as variáveis $\underline{x}$, $\underline{x}'$, $\underline{y}'$ e $\underline{y}$ por esta ordem:

$$\forall \underline{x} \exists \underline{x}' \forall \underline{y}' \exists \underline{y} [A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to A_D(\underline{x}', \underline{y}')].$$

Agora aplicamos AC duas vezes: uma para tornar $\underline{x}'$ numa "função" $\underline{X}'$ de $\underline{x}$ e outra para tornar $\underline{y}$ numa "função" $\underline{Y}$ de $\underline{x}, \underline{y}'$:

$$\exists \underline{X}', \underline{Y} \forall \underline{x}, \underline{y}' \exists \underline{y} [A_D(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}\,\underline{y}') \to A_D(\underline{X}'\underline{x}, \underline{y}')] \equiv (A \to B)^D.$$

<u>Mnemónica para $(\forall z A)^D$</u> Primeiro escrevemos a quantificação $\forall z A$ com A^D no lugar de A:

$$\forall z \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}).$$

Depois aplicamos AC para tornar $\underline{x}$ numa "função" $\underline{X}$ de z:

$$\exists \underline{X} \forall z, \underline{y} A_D(\underline{X} z, \underline{y}) \equiv (\forall z A)^D.$$

Observação 69. Demonstramos facilmente por indução na complexidade das fórmulas que A_D não tem quantificadores e que se A_{sq} é uma fórmula sem quantificadores e sem disjunções, de HA_0^ω, então $(A_{sq})^D \equiv A_{sq}$.

De seguida calculamos a D-tradução para o símbolo lógico definido $\neg$.

Proposição 70. *Se* $A^D \equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y})$, *então* $(\neg A)^D \equiv \exists \underline{Y} \forall \underline{x} \neg A_D(\underline{x}, \underline{Y}\, \underline{x})$.

Demonstração. Trata-se apenas de uma questão de contas. □

Teorema 71 (da correcção de D)**.** *Sejam A uma fórmula arbitrária de* HA_0^ω, $\underline{l}$ *todas as variáveis livres de A e* $A^D \equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y})$. *Se* $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{AC} + \mathsf{IP} + \mathsf{M} \vdash A$, *então existe um uplo de termos fechados* $\underline{t}$ *de* HA_0^ω, *que pode ser calculado a partir de uma derivação de A, tal que* $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall \underline{y} A_D(\underline{t}\,\underline{l}, \underline{y})$.

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução no comprimento das derivações, construindo explicitamente os termos $\underline{t}$. Para tal, temos de para cada axioma A de HA_0^ω construir um termo $\underline{t}$ nas condições do enunciado, e de para cada regra $A \;\Rightarrow\; B$ de HA_0^ω, supondo que existe um termo $\underline{q}$ para A nas condições do enunciado, construir um termo $\underline{t}$ para B nas condições do enunciado. Vamos verificar apenas alguns axiomas e regras para dar a ideia da demonstração.

Quando conveniente, vamos denotar por $\underline{l}_A$ as variáveis de $FV(A)$, por $\underline{l}_{AB}$ as variáveis de $FV(A) \cup FV(B)$, por $\underline{l}_{A\setminus B}$ as variáveis de $FV(A) \setminus FV(B)$, por $\underline{l}_{A\cap B}$ as variáveis de $FV(A) \cap FV(B)$, por $\underline{l}_{A\setminus BC}$ as variáveis de $FV(A) \setminus [FV(B) \cup FV(C)]$ e por $\underline{l}_{AB\setminus(C\setminus DE)}$ as variáveis de $[FV(A) \cup FV(B)] \setminus \big[FV(C) \setminus \big(FV(D) \cup FV(E)\big)\big]$. Iremos também usar os índices A, AB, $A \setminus B$, $A \cap B$, $A \setminus BC$ e $AB \setminus (C \setminus DE)$ para variáveis relacionadas com $\underline{l}_A$, $\underline{l}_{AB}$, $\underline{l}_{A\setminus B}$, $\underline{l}_{A\cap B}$, $\underline{l}_{A\setminus BC}$ e $\underline{l}_{AB\setminus(C\setminus DE)}$. Por exemplo, se substituirmos $\underline{l}_{AB}$ por $\underline{\mathcal{O}}$, então podemos denotar $\underline{\mathcal{O}}$ por $\underline{\mathcal{O}}_{AB}$.

$\underline{A \vee A \to A}$ Temos

$$(A \vee A \to A)^D \equiv \exists \underline{X''}, \underline{Y}, \underline{Y'} \forall z, \underline{x}, \underline{x'}, \underline{y''}$$
$$\big[\big(z =_0 0 \to A_D(\underline{x}, \underline{Y} z \underline{x}\,\underline{x'}\,\underline{y''})\big) \wedge \big(z \neq_0 \to A_D(\underline{x'}, \underline{Y'} z \underline{x}\,\underline{x'}\,\underline{y''})\big) \to A_D(\underline{X''} z \underline{x}\,\underline{x'}, \underline{y''})\big].$$

Como a fórmula $z =_0 0$ não tem quantificadores, então pelo teorema 56 existem termos $\underline{q}$, cujas variáveis são exactamente $z, \underline{x}, \underline{x'}$, tais que

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \big[z =_0 0 \to \big(A_D(\underline{q}, \underline{y''}) \leftrightarrow A_D(\underline{x}, \underline{y''})\big)\big] \wedge \big[z \neq_0 0 \to \big(A_D(\underline{q}, \underline{y''}) \leftrightarrow A_D(\underline{x'}, \underline{y''})\big)\big],$$

isto é (informalmente)

$$\underline{q} = \begin{cases} \underline{x} & \text{se} \quad z =_0 0 \\ \underline{x'} & \text{se} \quad z \neq_0 0 \end{cases}.$$

Os termos

$$\begin{aligned} t_{\underline{X''}} &:\equiv \lambda \underline{l}, z, \underline{x}, \underline{x'} \,.\, \underline{q}, \\ t_{\underline{Y}} &:\equiv \lambda \underline{l}, z, \underline{x}, \underline{x'}, \underline{y''} \,.\, \underline{y''}, \\ t_{\underline{Y'}} &:\equiv \lambda \underline{l}, z, \underline{x}, \underline{x'}, \underline{y''} \,.\, \underline{y''}. \end{aligned}$$

estão nas condições pretendidas.

$\underline{A \wedge B \to A}$ Temos

$$(A \wedge B \to A)^D \equiv$$
$$\exists \underline{X''}, \underline{Y}, \underline{Y'} \forall \underline{x}, \underline{x'}, \underline{y''} [A_D(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}\,\underline{x'}\,\underline{y''}) \wedge B_D(\underline{x'}, \underline{Y'}\,\underline{x}\,\underline{x'}\,\underline{y''}) \to A_D(\underline{X''}\,\underline{x}\,\underline{x'}, \underline{y''})].$$

Os termos

$$\begin{aligned} \underline{t}_{X''} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{x}, \underline{x'} \,.\, \underline{x}, \\ \underline{t}_{Y} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{x}, \underline{x'}, \underline{y''} \,.\, \underline{y''}, \\ \underline{t}_{Y'} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{x}, \underline{x'}, \underline{y''} \,.\, \underline{\mathcal{O}}, \end{aligned}$$

(onde $\underline{\mathcal{O}}$ tem tipo apropriado) estão nas condições pretendidas.

$\underline{A \to A \wedge A}$ Temos

$$(A \to A \wedge A)^D \equiv$$
$$\exists \underline{X'}, \underline{X''}, \underline{Y} \forall \underline{x}, \underline{y'}, \underline{y''} [A_D(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}\,\underline{y'}\,\underline{y''}) \to A_D(\underline{X'}\,\underline{x}, \underline{y'}) \wedge A_D(\underline{X''}\,\underline{x}, \underline{y''})].$$

Como $A_D(\underline{x}, \underline{y'})$ não tem quantificadores, então pelo teorema 56 existem termos $\underline{q}$, cujas variáveis são exactamente as de $FV\big(A_D(\underline{x}, \underline{y'})\big)$ e $\underline{y'}, \underline{y''}$, isto é, $\underline{l}, \underline{x}, \underline{y'}, \underline{y''}$ (porque as variáveis de $FV\big(A_D(\underline{x}, \underline{y'})$ são as de $FV(A)$ e $\underline{x}, \underline{y'}\big)$tais que

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \big[A_D(\underline{x},\underline{y'}) \to \big(A_D(\underline{x},\underline{q}) \leftrightarrow A_D(\underline{x},\underline{y''})\big)\big] \wedge \big[\neg A_D(\underline{x},\underline{y'}) \to \big(A_D(\underline{x},\underline{q}) \leftrightarrow A_D(\underline{x},\underline{y'})\big)\big],$$

isto é (informalmente),

$$\underline{q} = \begin{cases} \underline{y''} & \text{se} \quad A_D(\underline{x}, \underline{y'}) \\ \underline{y'} & \text{se} \quad \neg A_D(\underline{x}, \underline{y'}) \end{cases} .$$

Os termos

$$\begin{aligned} \underline{t}_{X'} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{x} \,.\, \underline{x}, \\ \underline{t}_{X''} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{x} \,.\, \underline{x}, \\ \underline{t}_{Y} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{x}, \underline{y'}, \underline{y''} \,.\, \underline{q} \end{aligned}$$

estão nas condições pretendidas. Para verificarmos que são fechados, provamos por indução na complexidade das fórmulas que as variáveis de $A_D(\underline{x}, \underline{y'})$ estão entre as variáveis $\underline{l}$ (isto é, as variáveis de $FV(A)$) e $\underline{x}, \underline{y'}$, pelo que as variáveis de q estão entre as variáveis $\underline{l}, \underline{x}, \underline{y'}, \underline{y''}$.

Notemos que, neste caso, a escolha não é canónica, uma vez que podíamos ter escolhido

$$\underline{q} = \begin{cases} \underline{y'} & \text{se} \quad A_D(\underline{x}, \underline{y''}) \\ \underline{y''} & \text{se} \quad \neg A_D(\underline{x}, \underline{y''}) \end{cases} .$$

$\underline{A \to B \ \Rightarrow \ \exists z A \to B}$ Temos

$$\begin{aligned} (A \to B)^D &\equiv \exists \underline{X'}, \underline{Y} \forall \underline{x}, \underline{y'} [A_D(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}\,\underline{y'}) \to B_D(\underline{X'}\,\underline{x}, \underline{y'})], \\ (\exists z A \to B)^D &\equiv \exists \underline{X'}, \underline{Y} \forall z, \underline{x}, \underline{y'} [A_D(\underline{x}, \underline{Y} z \underline{x}\,\underline{y'}) \to B_D(\underline{X'} z \underline{x}, \underline{y'})]. \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, existem termos fechados $\underline{q}_{X'}, \underline{q}_{Y}$ tais que

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall \underline{x}, \underline{y}'[A_D(\underline{x}, \underline{q}_Y \underline{l}\, \underline{x}\, \underline{y}') \to B_D(\underline{q}_{X'} \underline{l}\, \underline{x}, \underline{y}')],$$

onde $\underline{l}$ são as variáveis de $FV(A \to B)$. Sejam $\underline{l}'$ as variáveis de $FV(\exists z A \to B)$ (logo $\underline{l}'$ é $\underline{l}$ excepto z). Os termos

$$\begin{aligned} \underline{t}_{X'} &:\equiv \lambda \underline{l}', z, \underline{x} \,.\, (\underline{q}_{X'} \underline{l}\, \underline{x}), \\ \underline{t}_{Y} &:\equiv \lambda \underline{l}', z, \underline{x}, \underline{y}' \,.\, (\underline{q}_{Y} \underline{l}\, \underline{x}\, \underline{y}'), \end{aligned}$$

estão nas condições pretendidas, isto é, são fechados e verificam

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall z, \underline{x}, \underline{y}'[A_D(\underline{x}, \underline{t}_Y \underline{l}' z \underline{x}\, \underline{y}') \to B_D(\underline{t}_{X'} \underline{l}' z \underline{x}, \underline{y}')].$$

$\underline{A, A \to B \;\Rightarrow\; B}$ Temos

$$\begin{aligned} A^D &\equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}, \underline{l}_{A \backslash B}), \\ B^D &\equiv \exists \underline{x}' \forall \underline{y}' B_D(\underline{x}', \underline{y}'), \\ (A \to B)^D &\equiv \exists \underline{X}', \underline{Y} \forall \underline{x}, \underline{y}'[A_D(\underline{x}, \underline{Y}\, \underline{x}\, \underline{y}', \underline{l}_{A \backslash B}) \to B_D(\underline{X}' \underline{x}, \underline{y}')]. \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, existem termos fechados $\underline{q}$ e $\underline{r}_{X'}, \underline{r}_Y$ tais que

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall \underline{y} A_D(\underline{q}\, \underline{l}_A, \underline{y}, \underline{l}_{A \backslash B}), \tag{2.1}$$
$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall \underline{x}, \underline{y}'[A_D(\underline{x}, \underline{r}_Y \underline{l}_{AB} \underline{x}\, \underline{y}', \underline{l}_{A \backslash B}) \to B_D(\underline{r}_{X'} \underline{l}_{AB} \underline{x}, \underline{y}')]. \tag{2.2}$$

Para simplificar a notação, no resto desta alínea onde aparecer

$$\underline{q}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}, \qquad \underline{r}_{X'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}, \qquad \underline{r}_Y\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l},$$

devemos entender, respectivamente,

$$\underline{q}\underline{\mathcal{O}}_{A \backslash B} \underline{l}_{A \cap B}, \qquad \underline{r}_{X'}\underline{\mathcal{O}}_{A \backslash B} \underline{l}_B, \qquad \underline{r}_Y\underline{\mathcal{O}}_{A \backslash B} \underline{l}_B,$$

isto é, em $\underline{q}\,\underline{l}_A$, $\underline{r}_{X'} \underline{l}_{AB}$ e $\underline{r}_Y \underline{l}_{AB}$ estamos a substituir os $\underline{l}_{A \backslash B}$ (que supomos serem as primeiras variáveis dos uplos $\underline{l}_A$ e $\underline{l}_{AB}$) por $\underline{\mathcal{O}}_{A \backslash B}$ e a não alterar as restantes variáveis desses uplos.
Vejamos que os termos

$$\underline{t} :\equiv \lambda \underline{l}_B \,.\, [\underline{r}_{X'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}(\underline{q}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l})]$$

estão nas condições pretendidas, isto é, são fechados (óbvio) e verificam

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall \underline{y}' B_D(\underline{t}\, \underline{l}_B, \underline{y}'). \tag{2.3}$$

Pondo $\underline{l}_{A \backslash B} = \underline{\mathcal{O}}_{A \backslash B}$ e $\underline{y} = \underline{r}_Y \underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}(\underline{q}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l})\underline{y}'$ em (2.2) e $\underline{l}_{A \backslash B} = \underline{\mathcal{O}}_{A \backslash B}$ e $\underline{x} = \underline{q}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}$ em (2.3) vem, respectivamente

$$\begin{aligned} \mathsf{HA}_0^\omega &\vdash A_D\big(\underline{q}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}, \underline{r}_Y \underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}(\underline{q}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l})\underline{y}', \underline{\mathcal{O}}_{A \backslash B}\big), \\ \mathsf{HA}_0^\omega &\vdash \forall \underline{y}'\big[A_D\big(\underline{q}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}, \underline{r}_Y \underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}(\underline{q}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l})\underline{y}', \underline{\mathcal{O}}_{A \backslash B}\big) \to B_D\big(\underline{r}_{X'} \underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}(\underline{q}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}), \underline{y}'\big)\big], \end{aligned}$$

logo por *modus ponens* vem (2.3).

$\underline{A \to B, B \to C \ \Rightarrow\ A \to C}$ Temos

$$\begin{array}{rcl}(A \to B)^D & \equiv & \exists \underline{X}', \underline{Y} \forall \underline{x}, \underline{y}' [A_D(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}\,\underline{y}') \to B_D(\underline{X}'\underline{x}, \underline{y}', \underline{l}_{B\setminus AC})], \\ (B \to C)^D & \equiv & \exists \underline{X}'', \underline{Y}' \forall \underline{x}', \underline{y}'' [B_D(\underline{x}', \underline{Y}'\underline{x}'\underline{y}'', \underline{l}_{B\setminus AC}) \to C_D(\underline{X}''\underline{x}', \underline{y}'')], \\ (A \to C)^D & \equiv & \exists \underline{X}'', \underline{Y} \forall \underline{x}, \underline{y}'' [A_D(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}\,\underline{y}'') \to C_D(\underline{X}''\underline{x}, \underline{y}'')].\end{array}$$

Por hipótese de indução, existem termos fechados $\underline{q}_{X'}, \underline{q}_Y$ e $\underline{r}_{X''}, \underline{r}_{Y'}$ tais que

$$\begin{array}{rcll}\mathsf{HA}_0^\omega & \vdash & \forall \underline{x}, \underline{y}' [A_D(\underline{x}, \underline{q}_Y \underline{l}_{AB} \underline{x}\,\underline{y}') \to B_D(\underline{q}_{X'} \underline{l}_{AB} \underline{x}, \underline{y}', \underline{l}_{B\setminus AC})], & (2.4) \\ \mathsf{HA}_0^\omega & \vdash & \forall \underline{x}', \underline{y}'' [B_D(\underline{x}', \underline{r}_{Y'} \underline{l}_{BC} \underline{x}'\underline{y}'', \underline{l}_{B\setminus AC}) \to C_D(\underline{r}_{X''} \underline{l}_{BC} \underline{x}', \underline{y}'')]. & (2.5)\end{array}$$

Para simplificar a notação, no resto desta alínea onde aparecer

$$\underline{q}_{X'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}, \qquad \underline{q}_Y\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}, \qquad \underline{r}_{X''}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}, \qquad \underline{r}_{Y'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l},$$

devemos entender, respectivamente,

$$\underline{q}_{X'}\underline{\mathcal{O}}_{B\setminus AC}\underline{l}_{AB\setminus(B\setminus AC)},\ \underline{q}_{Y}\underline{\mathcal{O}}_{B\setminus AC}\underline{l}_{AB\setminus(B\setminus AC)},\ \underline{r}_{X''}\underline{\mathcal{O}}_{B\setminus AC}\underline{l}_{BC\setminus(B\setminus AC)},\ \underline{r}_{Y'}\underline{\mathcal{O}}_{B\setminus AC}\underline{l}_{BC\setminus(B\setminus AC)},$$

isto é, em $\underline{q}_{X'}\underline{l}_{AB}$, $\underline{q}_Y\underline{l}_{AB}$, $\underline{r}_{X''}\underline{l}_{BC}$ e $\underline{r}_{Y'}\underline{l}_{BC}$ estamos a substituir os $\underline{l}_{B\setminus AC}$ (que supomos serem as primeiras variáveis dos uplos $\underline{l}_{AB}$ e $\underline{l}_{BC}$) por $\underline{\mathcal{O}}_{B\setminus AC}$ e a não alterar as restantes variáveis desses uplos.
Vejamos que os termos

$$\begin{array}{rcl}\underline{t}_{X''} & :\equiv & \lambda \underline{l}_{AC}, \underline{x}\,.\,[\underline{r}_{X''}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}(\underline{q}_{X'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}\,\underline{x})], \\ \underline{t}_Y & :\equiv & \lambda \underline{l}_{AC}, \underline{x}, \underline{y}''\,.\,\big[\underline{q}_Y\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}\,\underline{x}\big(\underline{r}_{Y'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}(\underline{q}_{X'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}\,\underline{x})\underline{y}''\big)\big],\end{array}$$

estão nas condições pretendidas, isto é, são fechados (óbvio) e verificam

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall \underline{x}, \underline{y}'' [A_D(\underline{x}, \underline{t}_Y \underline{l}_{AC} \underline{x}\,\underline{y}'') \to C_D(\underline{t}_{X''} \underline{l}_{AC} \underline{x}, \underline{y}'')]. \tag{2.6}$$

Pondo $\underline{l}_{B\setminus AC} = \underline{\mathcal{O}}_{B\setminus AC}$ e $\underline{y}' = \underline{r}_{Y'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}(\underline{q}_{X'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}\,\underline{x})\underline{y}''$ em (2.4) e $\underline{l}_{B\setminus AC} = \underline{\mathcal{O}}_{B\setminus AC}$ e $\underline{x}' = \underline{q}_{X'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}\,\underline{x}$ em (2.5) vem, respectivamente,

$$\begin{array}{rcl}\mathsf{HA}_0^\omega & \vdash & \forall \underline{x}\Big[A_D\Big(\underline{x}, \underline{q}_Y\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}\,\underline{x}\big(\underline{r}_{Y'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}(\underline{q}_{X'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}\,\underline{x})\underline{y}''\big)\Big) \to \\ & & B_D\big(\underline{q}_{X'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}\,\underline{x}, \underline{r}_{Y'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}(\underline{q}_{X'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}\,\underline{x})\underline{y}'', \underline{\mathcal{O}}_{B\setminus AC}\big)\Big], \\ \mathsf{HA}_0^\omega & \vdash & \forall \underline{y}''\big[B_D\big(\underline{q}_{X'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}\,\underline{x}, \underline{r}_{Y'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}(\underline{q}_{X'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}\,\underline{x})\underline{y}'', \underline{\mathcal{O}}_{B\setminus AC}\big) \to \\ & & C_D\big(\underline{r}_{X''}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}(\underline{q}_{X'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}\,\underline{x}), \underline{y}''\big)\big].\end{array}$$

Destas duas fórmulas vem, por silogismo, (2.6).

$\underline{\Pi, \Sigma, \underline{R}}$ $\underline{\text{e axiomas de } =_0 \text{ e } S}$ Estes axiomas são fórmulas A que não contêm os símbolos $\vee$, $\exists$ e $\forall$, logo $A^D \equiv A_D \equiv A$. Portanto, o resultado é trivial para tais fórmulas tomando $\underline{t}$ como sendo o uplo vazio.

IR Digamos que $A(z)^D \equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A(y)_D(\underline{x}, \underline{y})$. Provamos por indução na complexidade das fórmulas que $A(z)^D[0/z] \equiv A(0)^D$ e que $A(Sz)^D \equiv A(z)^D[Sz/z]$. Denotemos $A(z)_D(\underline{x}, \underline{y})$ por $A_D(\underline{x}, \underline{y}, z)$. Então

$$\begin{aligned} A(0)^D &\equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}, 0), \\ A(z)^D &\equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}, z), \\ [A(z) \to A(Sz)]^D &\equiv \exists \underline{X'}, \underline{Y} \forall \underline{x}, \underline{y'} [A_D(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}\,\underline{y'}, z) \to A_D(\underline{X'}\,\underline{x}, \underline{y'}, Sz)]. \end{aligned}$$

Sejam $\underline{l}$ as variáveis de $FV\big(A(z)\big)$ e $\underline{l'}$ as variáveis de $FV\big(A(0)\big)$ (portanto $\underline{l'}$ é $\underline{l}$ excepto z). Por hipótese de indução, existem termos fechados $\underline{q}$ e $\underline{r}_{\underline{X'}}, \underline{r}_{\underline{Y}}$ tais que

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall \underline{y} A_D(\underline{q}\,\underline{l'}, \underline{y}, 0), \tag{2.7}$$

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall \underline{x}, \underline{y'} [A_D(\underline{x}, \underline{r}_{\underline{Y}}\,\underline{l}\,\underline{x}\,\underline{y'}, z) \to A_D(\underline{r}_{\underline{X'}}\,\underline{l}\,\underline{x}, \underline{y'}, Sz)]. \tag{2.8}$$

Vejamos que os termos

$$\underline{t} :\equiv \lambda \underline{l} \,.\, [\underline{R} z (\underline{q}\,\underline{l'}) \lambda \underline{x}, z \,.\, (\underline{r}_{\underline{X'}}\,\underline{l}\,\underline{x})]$$

estão nas condições pretendidas, isto é, são fechados (óbvio) e verificam

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall \underline{y} A_D(\underline{t}\,\underline{l}, \underline{y}, z). \tag{2.9}$$

Provemos (2.9) por indução em z. O caso base vem (2.7). Vejamos o passo de indução. Suponhamos $\forall \underline{y} A_D(\underline{t}\underline{l}, \underline{y}, z)$. Pondo $\underline{x} = \underline{t}\underline{l}$ em (2.8) vem $\forall \underline{y'} A_D\big(\underline{r}_{\underline{X'}}\underline{l}(\underline{t}\underline{l}), \underline{y'}, Sz\big)$, isto é, $\forall \underline{y} A_D(\underline{t}\,\underline{l}, \underline{y'}, z)[Sz/z]$.

M Se numa derivação em algum momento aplicamos M a uma fórmula sem quantificadores A_{sq}, isto é, introduzimos a fórmula $\exists \underline{x} \neg\neg A_{sq} \to \exists \underline{x} A_{sq}$, então tal aplicação pode ser substituída por: (i) uma derivação da equivalência entre A_{sq} e uma fórmula atómica B_{at} (que existe pelo lema 54), (ii) a aplicação de M a B_{at}, isto é, a introdução da fórmula $\exists \underline{x} \neg\neg B_{at} \to \exists \underline{x} B_{at}$, e (iii) uma derivação de $\exists \underline{x} \neg\neg A_{sq} \to \exists \underline{x} A_{sq}$ a partir de $\exists \underline{x} \neg\neg B_{at} \to \exists \underline{x} B_{at}$ usando $A_{sq} \leftrightarrow B_{at}$. Desta forma toda a aplicação de M a uma fórmula sem quantificadores pode dar lugar a uma aplicação de M a uma fórmula atómica. Portanto, podemos supor que M só se aplica a fórmulas atómicas, que têm a vantagem de coincidirem com as próprias D-traduções e por isso simplificarem os cálculos que se seguem.
Temos

$$[\exists \underline{x} \neg\neg B_{at}(\underline{x}) \to \exists \underline{x} B_{at}(\underline{x})]^D \equiv \exists \underline{X'} \forall \underline{x} [\neg\neg B_{at}(\underline{x}) \to B_{at}(\underline{X'}\,\underline{x})].$$

Atendendo a que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg\neg B_{at} \to B_{at}$ (vem pelo teorema 55 porque B_{at} não tem quantificadores), verificamos que o uplo de termos $\underline{t} \equiv \lambda \underline{l}, \underline{x} \,.\, \underline{x}$ está nas condições pretendidas.

AC e IP De forma análoga ao explicado no caso anterior, podemos supor que as fórmulas sem quantificadores em IP são atómica, de modo a coincidirem com as suas D-traduções. Com este entendimento, os axiomas AC e IP são implicações $A \to B$

tais que $A^D \equiv B^D$. Por isso, as D-traduções destes axiomas são instanciações de $(C \to C)^D$. Derivamos a fórmula $C \to C$ em HA_0^ω recorrendo aos axiomas $C \to C \wedge C$, $C \wedge C \to C$ e ao silogismo. Neste ponto da demonstração já vimos que há termos nas condições do enunciado para estes dois axiomas e esta regra. Então há termos nas condições do enunciado para fórmulas deriváveis por meio destes axiomas e regra, logo há para AC e IP. $\square$

Mencionámos no início do capítulo que não definimos $(A \vee B)^D$ por

$$(A \vee B)^D \equiv \exists \underline{x}, \underline{x'} \forall \underline{y}, \underline{y'} [A_D(\underline{x}, \underline{y}) \vee B_D(\underline{x'}, \underline{y'})], \tag{2.10}$$

porque com tal definição não conseguíamos demonstrar o teorema da correcção de D. Como prometido, vamos ver o que falhava.

1. A primeira observação é que não podíamos garantir que os termos dados pelo teorema da correcção de D fossem fechados. Por exemplo, no caso $A \vee A \to A$, usando (2.10), teríamos

$$\begin{gathered}(A \vee A \to A)^D \equiv \\ \exists \underline{X''}, \underline{Y}, \underline{Y'} \forall \underline{x}, \underline{x'}, \underline{y''} [A_D(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}\,\underline{x'}\,\underline{y''}) \vee A_D(\underline{x'}, \underline{Y'}\,\underline{x}\,\underline{x'}\,\underline{y''}) \to A_D(\underline{X''}\,\underline{x}\,\underline{x'}, \underline{y''})].\end{gathered}$$

   Os únicos termos que pareciam funcionar eram

$$\begin{aligned} \underline{t}_{X''} &\equiv \lambda \underline{l}, \underline{x}, \underline{x'} \,.\, \underline{q}, \\ \underline{t}_{Y} &\equiv \lambda \underline{l}, \underline{x}, \underline{x'}, \underline{y''} \,.\, \underline{y''}, \\ \underline{t}_{Y'} &\equiv \lambda \underline{l}, \underline{x}, \underline{x'}, \underline{y''} \,.\, \underline{y''}, \end{aligned}$$

   onde $\underline{q}$ eram termos, dados pelo teorema 56, tais que

$$\begin{gathered}\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \big[A_D(\underline{x}, \underline{y''}) \to \big(A_D(\underline{q}, \underline{y''}) \leftrightarrow A_D(\underline{x}, \underline{y''})\big)\big] \wedge \\ \big[\neg A_D(\underline{x}, \underline{y''}) \to \big(A_D(\underline{q}, \underline{y''}) \leftrightarrow A_D(\underline{x'}, \underline{y''})\big)\big].\end{gathered}$$

   ou tais que

$$\begin{gathered}\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \big[A_D(\underline{x'}, \underline{y''}) \to \big(A_D(\underline{q}, \underline{y''}) \leftrightarrow A_D(\underline{x'}, \underline{y''})\big)\big] \wedge \\ \big[\neg A_D(\underline{x'}, \underline{y''}) \to \big(A_D(\underline{q}, \underline{y''}) \leftrightarrow A_D(\underline{x}, \underline{y''})\big)\big].\end{gathered}$$

   Mas as variáveis dos termos $\underline{q}$ são exactamente as de $FV\big(A_D(\underline{x}, \underline{y''})\big)$ e $\underline{x}, \underline{x'}$, pelo que os termos $\underline{t}_{X''}$ não seriam em geral fechados porque $\underline{y''} \in FV(\underline{t}_{X''})$.

2. A segunda observação é que se alguns dos termos não forem fechados, então já não conseguimos demonstrar o teorema da correcção de D. Por exemplo, vejamos o caso $A, A \to B \;\Rightarrow\; B$. Temos

$$\begin{aligned} A^D &\equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}), \\ B^D &\equiv \exists \underline{x'} \forall \underline{y'} B_D(\underline{x'}, \underline{y'}), \\ (A \to B)^D &\equiv \exists \underline{X'}, \underline{Y} \forall \underline{x}, \underline{y'} [A_D(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}\,\underline{y'}) \to B_D(\underline{X'}\,\underline{x}, \underline{y'})]. \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, existem termos (não necessariamente fechados) $\underline{q}$ e $\underline{r}_{X'}, \underline{r}_Y$ tais que

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall \underline{y} A_D(\underline{q}\,\underline{l}_A, \underline{y}), \tag{2.11}$$
$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall \underline{x}, \underline{y}'[A_D(\underline{x}, \underline{r}_Y \underline{l}_{AB} \underline{x}\,\underline{y}') \to B_D(\underline{r}_{X'} \underline{l}_{AB} \underline{x}, \underline{y}')]. \tag{2.12}$$

Suponhamos por momentos que os termos $\underline{q}$ e $\underline{r}_{X'}, \underline{r}_Y$ eram fechados. Para obtermos termos que funcionem para B^D, parece não haver outra solução a não ser pôr $\underline{y} = \underline{r}_Y \underline{l}_{AB}(\underline{q}\,\underline{l}_A)\underline{y}'$ em (2.11) $\underline{x} = \underline{q}\,\underline{l}_A$ em (2.12), obtendo

$$\begin{aligned} \mathsf{HA}_0^\omega &\vdash A_D\big(\underline{q}\,\underline{l}_A, \underline{r}_Y \underline{l}_{AB}(\underline{q}\,\underline{l}_A)\underline{y}'\big), \\ \mathsf{HA}_0^\omega &\vdash \forall \underline{y}'\big[A_D\big(\underline{q}\,\underline{l}_A, \underline{r}_Y \underline{l}_{AB}(\underline{q}\,\underline{l}_A)\underline{y}'\big) \to B_D\big(\underline{r}_{X'} \underline{l}_{AB}(\underline{q}\,\underline{l}_A), \underline{y}'\big)\big], \end{aligned}$$

donde concluiríamos $\forall \underline{y}' B_D(\underline{r}_{X'} \underline{l}_{AB}(\underline{q}\,\underline{l}_A), \underline{y}')$ e portanto os termos

$$\underline{t} :\equiv \lambda \underline{l}_B \,.\, [\underline{r}_{X'} \underline{\mathcal{O}}_{A \setminus B} \underline{l}_B(\underline{q}\,\underline{\mathcal{O}}_{A\setminus B} \underline{l}_{A \cap B})]$$

funcionariam para B^D.
Mas como os termos $\underline{q}$ e $\underline{r}_{X'}, \underline{r}_Y$ podem não serem fechados, o que é obtemos é algo diferente porque as variáveis $\underline{y}$ podem ocorrer em $q(\underline{y})$ e as variáveis $\underline{x}$ podem ocorrem em $\underline{r}_{X'}(\underline{x})$ e em $\underline{r}_Y(\underline{x})$:

$$\begin{aligned} \mathsf{HA}_0^\omega &\vdash A_D\Big(\underline{q}\big(\underline{r}_Y \underline{l}_{AB}(\underline{q}\,\underline{l}_A)\underline{y}'\big)\underline{l}_A, \underline{r}_Y \underline{l}_{AB}(\underline{q}\,\underline{l}_A)\underline{y}'\Big), \\ \mathsf{HA}_0^\omega &\vdash \forall \underline{y}'\big[A_D\big(\underline{q}\,\underline{l}_A, \underline{r}_Y(\underline{q}\,\underline{l}_A)\underline{l}_{AB}(\underline{q}\,\underline{l}_A)\underline{y}'\big) \to B_D\big(\underline{r}_{X'}(\underline{q}\,\underline{l}_A)\underline{l}_{AB}(\underline{q}\,\underline{l}_A), \underline{y}'\big)\big]. \end{aligned}$$

Parece então que não conseguimos encontrar termos que funcionem para B^D.

Teorema 72 (da caracterização de D)**.** *Para toda a fórmula A de HA_0^ω, temos*

$$\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{AC} + \mathsf{IP} + \mathsf{M} \vdash A \leftrightarrow A^D.$$

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução na complexidade das fórmulas. Vamos verificar apenas alguns casos para dar a ideia da demonstração.

$\underline{A \wedge B}$ Este caso é fácil usando as regras de prenifixação.

$\underline{A \vee B}$ Temos

$$\begin{aligned} A^D &\equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}), \\ B^D &\equiv \exists \underline{x}' \forall \underline{y}' B_D(\underline{x}', \underline{y}'), \\ (A \vee B)^D &\equiv \exists z^0, \underline{x}, \underline{x}' \forall \underline{y}, \underline{y}'\big[\big(z =_0 0 \to A_D(\underline{x}, \underline{y})\big) \wedge \big(z \neq_0 0 \to B_D(\underline{x}', \underline{y}')\big)\big]. \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, temos $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{AC} + \mathsf{IP} + \mathsf{M} \vdash A \leftrightarrow A^D$ e $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{AC} + \mathsf{IP} + \mathsf{M} \vdash B \leftrightarrow B^D$. Consideremos o termo t_{A_D} dado pelo lema 54. Em $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{AC} + \mathsf{IP} + \mathsf{M}$

derivamos

$$\begin{array}{rcl} A \vee B & \to & A^D \vee B^D \\ & \to & \exists \underline{x}, \underline{x}' \forall \underline{y}, \underline{y}' [A_D(\underline{x}, \underline{y}) \vee B_D(\underline{x}', \underline{y}')] \\ & \to & \exists \underline{x}, \underline{x}' \forall \underline{y}, \underline{y}' \big[\big(t_{A_D} =_0 0 \to A_D(\underline{x}, \underline{y}) \big) \wedge \big(t_{A_D} \neq_0 0 \to B_D(\underline{x}', \underline{y}') \big) \big] \\ & \to & (A \vee B)^D \\ & \to & \exists z^0 [(z =_0 0 \to A^D) \wedge (z \neq_0 0 \to B^D)] \\ & \to & A^D \vee B^D \\ & \to & A \vee B, \end{array}$$

onde na segunda e na quinta implicações usámos regras de prenifixação.

$\underline{A \to B \text{ e } \forall z A}$ Basta observar que todos os passos referidos na observação 68 para o cálculo de D-traduções de implicações e quantificações universais e na motivação 1 dão origem a fórmulas equivalentes em $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{AC} + \mathsf{IP} + \mathsf{M}$. □

Observação 73. Em [Ferreira 2007] encontramos uma interpretação bastante interessante dos teoremas da caracterização. Usando o teorema da caracterização de D, vamos ver que no teorema da correcção de D não faltam princípios. Suponhamos que o teorema da correcção de D também valia se em vez da hipótese $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{AC} + \mathsf{IP} + \mathsf{M} \vdash A$ tivéssemos $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{AC} + \mathsf{IP} + \mathsf{M} + \mathsf{P} \vdash A$, onde P é um novo princípio. Claro que $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{AC} + \mathsf{IP} + \mathsf{M} + \mathsf{P} \vdash \mathsf{P}$, logo pelo teorema da correcção de D viria $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \mathsf{P}^D$ (na verdade viria $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall \underline{y} \mathsf{P}_D(\underline{t}, \underline{y})$, onde $\mathsf{P}^D \equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} \mathsf{P}_D(\underline{x}, \underline{y})$, mas daí viria $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \mathsf{P}^D$). Pelo teorema da caracterização de D temos $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{AC} + \mathsf{IP} + \mathsf{M} \vdash \mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{P}^D$, logo $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{AC} + \mathsf{IP} + \mathsf{M} \vdash \mathsf{P}$, pelo que afinal o princípio P é supérfluo.

O teorema seguinte diz-nos que se derivarmos uma fórmula $\forall x \exists y A_{sq}(x, y)$, então podemos a partir da derivação extrair um termo t que testemunha $\exists y$ em "função" de x, isto é, tal que $\forall x A_{sq}(x, tx)$. Podemos encarar esse termo t como sendo um "programa" que recebe como "entrada" um x e dá como "saída" um $y = tx$ tal que $A_{sq}(x, y)$.

Teorema 74 (da extracção de programas por D)**.** *Seja $A_{sq}(x, y)$ uma fórmula sem quantificadores de HA_0^ω tal que $FV(A_{sq}) = \{x, y\}$. Se*

$$\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{AC} + \mathsf{IP} + \mathsf{M} \vdash \forall x \exists y A_{sq}(x, y),$$

então existe um termo fechado t de HA_0^ω, que pode ser calculado a partir de uma derivação de $\forall x \exists y A_{sq}(x, y)$, tal que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall x A_{sq}(x, tx)$.

Demonstração. Pelo lema 54, existe uma fórmula atómica $B_{at}(x, y)$ tal que $FV(B_{at}) = FV(A_{sq})$ e $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A_{sq}(x, y) \leftrightarrow B_{at}(x, y)$. Temos $[\forall x \exists y B_{at}(x, y)]^D \equiv \exists Y \forall x B_{at}(x, Yx)$. Pelo teorema da correcção de D, existe um termo fechado t tal que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall x B_{at}(x, tx)$, logo $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall x A_{sq}(x, tx)$. □

Fazendo uma pequena adaptação à demonstração do teorema da extracção de programas por D, obtemos o seguinte resultado de conservação de $\mathsf{HA}_0^\omega+\mathsf{AC}+\mathsf{IP}+\mathsf{M}$ sobre HA_0^ω relativamente a fórmulas da forma $\forall x\exists y A_{sq}$.

Teorema 75 (da conservação por D)**.** *Seja A_{sq} uma fórmula sem quantificadores de HA_0^ω. Se*

$$\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{AC} + \mathsf{IP} + \mathsf{M} \vdash \forall x\exists y A_{sq},$$

então $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall x\exists y A_{sq}$.

Demonstração. Repetindo os argumentos do teorema da extracção de programas por D, obtemos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall x A_{sq}(x, t\underline{l}x)$, onde $\underline{l}$ são as variáveis de $FV(\forall x\exists y A_{sq})$. Daqui sai facilmente o resultado. $\square$

De seguida provamos que $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{AC} + \mathsf{IP} + \mathsf{M}$ é construtivo no seguinte sentido: (i) goza da *propriedade de existência*, isto é, se derivar $\exists x A(x)$, então existe um termo que testemunha o quantificador existencial (na verdade costuma-se chamar propriedade de existência ao caso particular em que $\exists x A(x)$ é uma fórmula fechada), e (ii) goza da *propriedade de disjunção*, isto é, se derivar uma disjunção fechada, então decide-a.

Teorema 76 ($\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{AC} + \mathsf{IP} + \mathsf{M}$ é construtivo)**.** *Sejam $\mathsf{H} :=\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{AC} + \mathsf{IP} + \mathsf{M}$ e A e B fórmulas de HA_0^ω.*

1. *Se $\mathsf{H} \vdash \exists x A(x)$, então existe um termo t de HA_0^ω tal que $FV(t) = FV(A) \setminus \{x\}$ e $\mathsf{H} \vdash A(t)$.*

2. *Se $FV(A \vee B) = \emptyset$ e $\mathsf{H} \vdash A \vee B$, então $\mathsf{H} \vdash A$ ou $\mathsf{H} \vdash B$.*

Demonstração.

1. Digamos que $A(x)^D \equiv \exists\underline{u}\forall\underline{v}A_D(x,\underline{u},\underline{v})$. Então $[\exists x A(x)]^D \equiv \exists x,\underline{u}\forall\underline{v}A_D(x,\underline{u},\underline{v})$. Pelo teorema da correcção de D existem termos fechados $t',\underline{q}$ tais que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall\underline{v}A_D(t'\underline{l},\underline{q}\underline{l},\underline{v})$, onde $\underline{l}$ são as variáveis de $FV\big(\exists x A(x)\big)$. Vem $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \exists\underline{u}\forall\underline{v}A_D(t'\underline{l},\underline{u},\underline{v}) \equiv A^D(t'\underline{l})$. Pelo teorema da caracterização de D temos $\mathsf{H} \vdash A(t'\underline{l}) \leftrightarrow A^D(t'\underline{l})$. Daqui e de $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A^D(t'\underline{l})$ concluímos $\mathsf{H} \vdash A(t'\underline{l})$. Finalmente tomamos $t :\equiv t'\underline{l}$.

2. Digamos que $A^D \equiv \exists\underline{x}\forall\underline{y}A_D(\underline{x},\underline{y})$ e $B^D \equiv \exists\underline{x'}\forall\underline{y'}B_D(\underline{x'},\underline{y'})$. Então

$$(A \vee B)^D \equiv \exists z^0, \underline{x}, \underline{x'}\forall\underline{y}, \underline{y'}\big[\big(z =_0 0 \to A_D(\underline{x},\underline{y})\big) \wedge \big(z \neq_0 0 \to B_D(\underline{x'},\underline{y'})\big)\big].$$

Pelo teorema da correcção de D existem termos fechados $t, \underline{q}, \underline{q'}$ tais que

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall\underline{y}, \underline{y'}\big[\big(t =_0 0 \to A_D(\underline{q},\underline{y})\big) \wedge \big(t \neq_0 0 \to B_D(\underline{q'},\underline{y'})\big)\big],$$

Vem

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (t =_0 0 \to A^D) \wedge (t \neq_0 0 \to B^D).$$

Pelo teorema da caracterização de D vem

$$\mathsf{H} \vdash (t =_0 0 \to A) \wedge (t \neq_0 0 \to B). \tag{2.13}$$

Como t é um termo fechado de tipo 0, então pelo teorema 45 existe um número natural n tal que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash t =_0 \overline{n}$. Temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \overline{n} =_0 0$ ou $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \overline{n} \neq_0 0$, logo $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash t =_0 0$ ou $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash t \neq_0 0$. No primeiro caso, de (2.13) vem $\mathsf{H} \vdash A$. No segundo caso, de (2.13) vem $\mathsf{H} \vdash B$. $\square$

Exemplo 77. Neste exemplo, baseado em baseado em [Oliva 2006], secção 2, exibimos termos que satisfazem a interpretação funcional de Gödel de uma fórmula.

<u>Motivação</u> A fórmula $C :\equiv \neg\neg A \wedge \neg\neg B \to \neg\neg(A \wedge B)$ é intuicionisticamente derivável, pelo que pelo teorema da correcção de D tem uma interpretação, isto é, existe um uplo $\underline{t}$ de termos fechados tal que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall \underline{v}\, C_D(\underline{t}\ \underline{l}, \underline{v})$, onde $\underline{l}$ são todas as variáveis de $FV(C)$ e $C^D \equiv \exists \underline{u} \forall \underline{v}\, C_D(\underline{u}, \underline{v})$. O nosso objectivo é apresentar explicitamente um uplo $\underline{t}$ de termos fechados nestas condições (mas não necessariamente o que é dado pelo teorema da correcção de D).

<u>Derivação intuicionista</u> Podemos derivar intuicionisticamente C da seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]\quad[B]}{A\wedge B}\quad[\neg(A\wedge B)]}{\bot}}{\neg A}\to\mathsf{I}\qquad \dfrac{[\neg\neg A\wedge\neg\neg B]}{\neg\neg A}}{\bot}}{\neg B}\to\mathsf{I}\qquad\dfrac{[\neg\neg A\wedge\neg\neg B]}{\neg\neg B}}{\bot}}{\neg\neg(A\wedge B)}\to\mathsf{I}}{\neg\neg A\wedge\neg\neg B\to\neg\neg(A\wedge B)}$$

<u>Cálculo de C^D</u> Digamos que $A^D \equiv \exists\underline{x}\forall\underline{y}A_D(\underline{x},\underline{y})$ e $B^D \equiv \exists\underline{x'}\forall\underline{y'}B_D(\underline{x'},\underline{y'})$. Calculamos

$$\begin{array}{rcl}
(\neg\neg A)^D & \equiv & \exists\underline{X}\forall\underline{Y}\neg\neg A_D\big(\underline{X}\,\underline{Y}, \underline{Y}(\underline{X}\,\underline{Y})\big) \\
(\neg\neg B)^D & \equiv & \exists\underline{X'}\forall\underline{Y'}\neg\neg B_D\big(\underline{X'}\,\underline{Y'}, \underline{Y'}(\underline{X'}\,\underline{Y'})\big), \\
(\neg\neg A \wedge \neg\neg B)^D & \equiv & \exists\underline{X}, \underline{X'}\forall\underline{Y}, \underline{Y'} \\
 & & \big[\neg\neg A_D\big(\underline{X}\,\underline{Y}, \underline{Y}(\underline{X}\,\underline{Y})\big) \wedge \neg\neg B_D\big(\underline{X'}\,\underline{Y'}, \underline{Y'}(\underline{X'}\,\underline{Y'})\big)\big], \\
[\neg\neg(A\wedge B)]^D & \equiv & \exists\underline{X''}, \underline{X'''}\forall\underline{Y''}, \underline{Y'''} \\
 & & \neg\neg\big[A_D\big(\underline{X''}\,\underline{Y''}\,\underline{Y'''}, \underline{Y''}(\underline{X''}\,\underline{Y''}\,\underline{Y'''})(\underline{X'''}\,\underline{Y''}\,\underline{Y'''})\big) \wedge \\
 & & B_D\big(\underline{X'''}\,\underline{Y''}\,\underline{Y'''}, \underline{Y'''}(\underline{X''}\,\underline{Y''}\,\underline{Y'''})(\underline{X'''}\,\underline{Y''}\,\underline{Y'''})\big)\big].
\end{array}$$

Usamos a mnemónica da observação 68 para calcular a D-tradução de C: escrevemos a implicação com o antecedente e o consequente traduzidos,

$$\begin{gathered}
\exists\underline{X}, \underline{X'}\forall\underline{Y}, \underline{Y'}\big[\neg\neg A_D\big(\underline{X}\,\underline{Y}, \underline{Y}(\underline{X}\,\underline{Y})\big) \wedge \neg\neg B_D\big(\underline{X'}\,\underline{Y'}, \underline{Y'}(\underline{X'}\,\underline{Y'})\big)\big] \to \\
\exists\underline{X''}, \underline{X'''}\forall\underline{Y''}, \underline{Y'''}\neg\neg\big[A_D\big(\underline{X''}\,\underline{Y''}\,\underline{Y'''}, \underline{Y''}(\underline{X''}\,\underline{Y''}\,\underline{Y'''})(\underline{X'''}\,\underline{Y''}\,\underline{Y'''})\big)\wedge \\
B_D\big(\underline{X'''}\,\underline{Y''}\,\underline{Y'''}, \underline{Y'''}(\underline{X''}\,\underline{Y''}\,\underline{Y'''})(\underline{X'''}\,\underline{Y''}\,\underline{Y'''})\big)\big],
\end{gathered}$$

prenifixamos pela ordem correcta,

$$\forall \underline{X}, \underline{X}' \exists \underline{X}'', \underline{X}''' \forall \underline{Y}'', \underline{Y}''' \exists \underline{Y}, \underline{Y}'$$
$$\Big[\neg\neg A_D\big(\underline{X}\,\underline{Y}, \underline{Y}(\underline{X}\,\underline{Y})\big) \wedge \neg\neg B_D\big(\underline{X}'\underline{Y}', \underline{Y}'(\underline{X}'\underline{Y}')\big) \to$$
$$\neg\neg\Big(A_D\big(\underline{X}''\underline{Y}''\underline{Y}''', \underline{Y}''(\underline{X}''\underline{Y}''\underline{Y}''')(\underline{X}'''\underline{Y}''\underline{Y}''')\big)\wedge$$
$$B_D\big(\underline{X}'''\underline{Y}''\underline{Y}''', \underline{Y}'''(\underline{X}''\underline{Y}''\underline{Y}''')(\underline{X}'''\underline{Y}''\underline{Y}''')\big)\Big)\Big],$$

e aplicamos AC,

$$C^D \equiv \exists \underline{\mathbb{X}}'', \underline{\mathbb{X}}''', \underline{\mathbb{Y}}, \underline{\mathbb{Y}}' \forall \underline{X}, \underline{X}', \underline{Y}'', \underline{Y}'''$$
$$\Big[\neg\neg A_D\Big(\underbrace{\underline{X}(\underline{\mathbb{Y}}\,\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''')}_{\equiv:\underline{\alpha}}, \underbrace{\underline{\mathbb{Y}}\,\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}'''\big(\underline{X}(\underline{\mathbb{Y}}\,\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''')\big)}_{\equiv:\underline{\beta}}\Big)\wedge$$
$$\neg\neg B_D\Big(\underbrace{\underline{X}'(\underline{\mathbb{Y}}'\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''')}_{\equiv:\underline{\alpha}'}, \underbrace{\underline{\mathbb{Y}}'\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}'''\big(\underline{X}'(\underline{\mathbb{Y}}'\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''')\big)}_{\equiv:\underline{\beta}'}\Big) \to$$
$$\neg\neg\Big(A_D\big(\underbrace{\underline{\mathbb{X}}''\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}'''}_{\equiv:\underline{\alpha}''}, \underbrace{\underline{Y}''(\underline{\mathbb{X}}''\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''')(\underline{\mathbb{X}}'''\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''')}_{\equiv:\underline{\beta}''}\big)\wedge$$
$$B_D\big(\underbrace{\underline{\mathbb{X}}'''\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}'''}_{\equiv:\underline{\alpha}'''}, \underbrace{\underline{Y}'''(\underline{\mathbb{X}}''\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''')(\underline{\mathbb{X}}'''\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''')}_{\equiv:\underline{\beta}'''}\big)\Big)\Big].$$

Descobrir os termos $\underline{t}$ Se tivermos $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}''$, $\underline{\alpha}' = \underline{\alpha}'''$, $\underline{\beta} = \underline{\beta}''$ e $\underline{\beta}' = \underline{\beta}'''$, então C^D fica na forma $\exists \underline{U} \forall \underline{V}[\neg\neg D \wedge \neg\neg E \to \neg\neg(D \wedge E)]$, pelo que se deriva intuicionisticamente. Por essa razão, procuramos $\underline{t}$ tal que $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}''$, $\underline{\alpha}' = \underline{\alpha}'''$, $\underline{\beta} = \underline{\beta}''$ e $\underline{\beta}' = \underline{\beta}'''$, ou mais precisamente, procuramos termos fechados $\underline{t} = \underline{t}_{\mathbb{X}''}, \underline{t}_{\mathbb{X}'''}, \underline{t}_{\mathbb{Y}}, \underline{t}_{\mathbb{Y}'}$ tais que

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\underline{X}(\underline{t}_{\mathbb{Y}}\underline{l}\,\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''') & = & \underline{t}_{\mathbb{X}''}\underline{l}\,\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''' \\
\underline{X}'(\underline{t}_{\mathbb{Y}'}\underline{l}\,\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''') & = & \underline{t}_{\mathbb{X}'''}\underline{l}\,\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''' \\
\underline{t}_{\mathbb{Y}}\underline{l}\,\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}'''\big(\underline{X}(\underline{t}_{\mathbb{Y}}\underline{l}\,\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''')\big) & = & \underline{Y}''(\underline{t}_{\mathbb{X}''}\underline{l}\,\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''')(\underline{t}_{\mathbb{X}'''}\underline{l}\,\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''') \\
\underline{t}_{\mathbb{Y}'}\underline{l}\,\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}'''\big(\underline{X}'(\underline{t}_{\mathbb{Y}'}\underline{l}\,\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''')\big) & = & \underline{Y}'''(\underline{t}_{\mathbb{X}''}\underline{l}\,\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''')(\underline{t}_{\mathbb{X}'''}\underline{l}\,\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''')
\end{array}\right. \tag{2.14}$$

onde a notação $\underline{q} = \underline{r}$ é uma forma conveniente de dizer que para toda a fórmula $D(\underline{w})$ de HA_0^ω devemos ter $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash D(\underline{q}) \leftrightarrow D(\underline{r})$.

Vamos fazer uma mudança de notação para aliviar a escrita. Sejam

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\underline{T}_{\mathbb{X}''} & :\equiv & \underline{t}_{\mathbb{X}''}\underline{l}\,\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''' \\
\underline{T}_{\mathbb{X}'''} & :\equiv & \underline{t}_{\mathbb{X}'''}\underline{l}\,\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''' \\
\underline{T}_{\mathbb{Y}} & :\equiv & \underline{t}_{\mathbb{Y}}\underline{l}\,\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}''' \\
\underline{T}_{\mathbb{Y}'} & :\equiv & \underline{t}_{\mathbb{Y}'}\underline{l}\,\underline{X}\,\underline{X}'\underline{Y}''\underline{Y}'''
\end{array}\right. . \tag{2.15}$$

Com esta notação o sistema (2.14) escreve-se

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\underline{X}\,\underline{T}_{\mathbb{Y}} & = & \underline{T}_{\mathbb{X}''} \\
\underline{X}'\underline{T}_{\mathbb{Y}'} & = & \underline{T}_{\mathbb{X}'''} \\
\underline{T}_{\mathbb{Y}}(\underline{X}\,\underline{T}_{\mathbb{Y}}) & = & \underline{Y}''\underline{T}_{\mathbb{X}''}\underline{T}_{\mathbb{X}'''} \\
\underline{T}_{\mathbb{Y}'}(\underline{X}'\underline{T}_{\mathbb{Y}'}) & = & \underline{Y}'''\underline{T}_{\mathbb{X}''}\underline{T}_{\mathbb{X}'''}
\end{array}\right. ,$$

o que equivale a

$$\left\{\begin{array}{rcl} \underline{X}\,\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}}} & = & \underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}} \\ \underline{X'}\,\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}'}} & = & \underline{T}_{\underline{\mathbb{X}'''}} \\ \underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}}}\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}} & = & \underline{Y''}\,\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}}\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}'''}} \\ \underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}'}}\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}'''}} & = & \underline{Y'''}\,\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}}\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}'''}} \end{array}\right. . \tag{2.16}$$

Com vista a descobrir $\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}}$, $\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}'''}}$, $\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}}}$ e $\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}'}}$ raciocinamos da seguinte maneira.

1. Suponhamos que já descobrimos $\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}}$.
2. Agora que conhecemos $\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}}$, a equação $\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}'}}\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}'''}} = \underline{Y'''}\,\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}}\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}'''}}$ sugere que ponhamos
$$\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}'}} := \lambda\underline{z}\,.\,(\underline{Y'''}\,\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}}\,\underline{z}). \tag{2.17}$$
Ficamos a conhecer $\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}}$ e $\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}'}}$.
3. Agora que conhecemos $\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}}$ e $\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}'}}$, a equação $\underline{X}\,\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}'}} = \underline{T}_{\underline{\mathbb{X}'''}}$ sugere que ponhamos
$$\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}'''}} := \underline{X'}\,\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}'}}. \tag{2.18}$$
Ficamos a conhecer $\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}}$, $\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}'''}}$ e $\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}'}}$.
4. Agora que conhecemos $\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}}$, $\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}'''}}$ e $\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}'}}$, a equação $\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}}}\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}} = \underline{Y''}\,\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}}\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}'''}}$ sugere que ponhamos
$$\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}}} := \lambda\underline{w}\,.\,(\underline{Y''}\,\underline{w}\,\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}'''}}).$$
Ficamos a conhecer $\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}}$, $\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}'''}}$, $\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}}}$ e $\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}'}}$.

Temos então

$$\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}} = \underline{X}\,\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}}} = \underline{X}\,\underbrace{\lambda\underline{w}\,.\,(\underline{Y''}\,\underline{w}\,\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}'''}})}_{=\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}}}} =$$
$$\underline{X}\lambda\underline{w}\,.\,[\underline{Y''}\,\underline{w}(\underbrace{\underline{X'}\,\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}'}}}_{=\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}'''}}})] = \underline{X}\lambda\underline{w}\,.\,\big[\underline{Y''}\,\underline{w}\big(\underline{X'}\,\underbrace{\lambda\underline{z}\,.\,(\underline{Y'''}\,\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}}\,\underline{z})}_{=\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}'}}}\big)\big].$$

Notemos que em

$$\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}} = \underline{X}\lambda\underline{w}\,.\,\big[\underline{Y''}\,\underline{w}\big(\underline{X'}\lambda\underline{z}\,.\,(\underline{Y'''}\,\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}}\,\underline{z})\big)\big]$$

há uma circularidade na definição de $\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}}$. Para "quebrarmos" essa circularidade, pomos $\underline{w}$ em lugar do segundo $\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}}$, obtendo

$$\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}} := \underline{X}\lambda\underline{w}\,.\,\big[\underline{Y''}\,\underline{w}\big(\underline{X'}\lambda\underline{z}\,.\,(\underline{Y'''}\,\underline{w}\,\underline{z})\big)\big]. \tag{2.19}$$

Surge agora um problema: $\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}}}$ tem de verificar as equações $\underline{X}\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}}} = \underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}}$ e $\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}}}\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}} = \underline{Y''}\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}}\underline{T}_{\underline{\mathbb{X}'''}}$ do sistema (2.16), mas só verifica esta última. Vamos por isso redefinir $\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}}}$. A comparação da definição (2.19) com a equação $\underline{X}\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}}} = \underline{T}_{\underline{\mathbb{X}''}}$ sugere a definição

$$\underline{T}_{\underline{\mathbb{Y}}} := \lambda\underline{w}\,.\,\big[\underline{Y''}\,\underline{w}\big(\underline{X'}\lambda\underline{z}\,.\,(\underline{Y'''}\,\underline{w}\,\underline{z})\big)\big].$$

De seguida definimos $\underline{T}_{\mathbb{Y}'}$ e $\underline{T}_{\mathbb{X}'''}$ por (2.17) e (2.18). Em resumo:

$$\begin{aligned}
\underline{T}_{\mathbb{X}''} &:= \underline{X}\lambda\underline{w}\,.\,\big[\underline{Y''}\,\underline{w}\big(\underline{X'}\lambda\underline{z}\,.\,(\underline{Y'''}\,\underline{w}\,\underline{z})\big)\big],\\
\underline{T}_{\mathbb{X}'''} &:= \underline{X'}\,\underline{T}_{\mathbb{Y}'},\\
\underline{T}_{\mathbb{Y}} &:= \lambda\underline{w}\,.\,\big[\underline{Y''}\,\underline{w}\big(\underline{X'}\lambda\underline{z}\,.\,(\underline{Y'''}\,\underline{w}\,\underline{z})\big)\big],\\
\underline{T}_{\mathbb{Y}'} &:= \lambda\underline{z}\,.\,(\underline{Y'''}\,\underline{T}_{\mathbb{X}''}\,\underline{z}).
\end{aligned}$$

Agora que sabemos quais os $\underline{T}_{\mathbb{X}''}, \underline{T}_{\mathbb{X}'''}, \underline{T}_{\mathbb{Y}}, \underline{T}_{\mathbb{Y}'}$ que nos interessam, "invertemos" o sistema (2.15) para obter os $\underline{t} = \underline{t}_{\mathbb{X}''}, \underline{t}_{\mathbb{X}'''}, \underline{t}_{\mathbb{Y}}, \underline{t}_{\mathbb{Y}'}$:

$$\begin{aligned}
\underline{t}_{\mathbb{X}''} &:\equiv \lambda\underline{l}, \underline{X}, \underline{X'}, \underline{Y''}, \underline{Y'''}\,.\,\underline{T}_{\mathbb{X}''},\\
\underline{t}_{\mathbb{X}'''} &:\equiv \lambda\underline{l}, \underline{X}, \underline{X'}, \underline{Y''}, \underline{Y'''}\,.\,\underline{T}_{\mathbb{X}'''},\\
\underline{t}_{\mathbb{Y}} &:\equiv \lambda\underline{l}, \underline{X}, \underline{X'}, \underline{Y'}, \underline{Y'''}\,.\,\underline{T}_{\mathbb{Y}},\\
\underline{t}_{\mathbb{Y}'} &:\equiv \lambda\underline{l}, \underline{X}, \underline{X'}, \underline{Y'}, \underline{Y'''}\,.\,\underline{T}_{\mathbb{Y}'}.
\end{aligned}$$

<u>Verificação de que os termos $\underline{t}$ interpretam C</u> Para verificar que os termos $\underline{t}$ interpretam C, vamos verificar que são soluções do sistema (2.16). Só a equação $\underline{T}_{\mathbb{Y}}\underline{T}_{\mathbb{X}''} = \underline{Y''}\,\underline{T}_{\mathbb{X}''}\underline{T}_{\mathbb{X}'''}$ do sistema (2.16) não é de verificação óbvia. Verifiquemo-la:

$$\underline{T}_{\mathbb{Y}}\underline{T}_{\mathbb{X}''} = \underline{Y''}\,\underline{T}_{\mathbb{X}''}[\underline{X'}\,\underbrace{\lambda\underline{z}\,.\,(\underline{Y'''}\,\underline{T}_{\mathbb{X}''}\,\underline{z})}_{=\underline{T}_{\mathbb{Y}'}}] = \underline{Y''}\,\underline{T}_{\mathbb{X}''}(\underbrace{\underline{X'}\,\underline{T}_{\mathbb{Y}'}}_{=\underline{T}_{\mathbb{X}'''}}) = \underline{Y''}\,\underline{T}_{\mathbb{X}''}\underline{T}_{\mathbb{X}'''}.$$

Nota histórica 78. A origem da interpretação funcional de Gödel é uma história algo tortuosa. Sabemos que a ideia de Gödel data de pelo menos 1941, ano em que proferiu palestras em Yale e Princeton nas quais já menciona a sua interpretação. Mas foi apenas em 1958 que publicou essas ideias no seu artigo [Gödel 1958], que saiu na revista *Dialectica*. Em 1965 Gödel é convidado a republicar o artigo na mesma revista, mas em inglês. Durante os quatro anos seguintes faz uma série de revisões ao artigo que nunca o deixam satisfeito e acaba por não o republicar. A última versão do artigo, [Gödel 1972], data de aproximadamente 1972. Após escrever e reescrever partes do artigo, Gödel opta por fazer as alterações essencialmente na forma de 14 notas de rodapé. Era principalmente a expressão dos aspectos filosóficos do artigo que deixava Gödel insatisfeito.

O objectivo inicial de Gödel foi usar a sua interpretação funcional para demonstrar a inderivabilidade intuicionista de $\neg\neg\forall x(A \vee \neg A)$. Mas no artigo apresenta a interpretação funcional como um contributo a uma versão mais lata do programa de Hilbert: provar a consistência de teorias clássicas reduzindo-a à consistência de noções o mais intuitivas possível. A ideia de Gödel é a seguinte: (i) reduzir a consistência de PA à consistência de HA (ver nota história 21) e (ii) reduzir a consistência de HA à consistência de T (que por não ter quantificadores é de certa forma mais intuitiva). O passo (i) já estava feito usando traduções negativas (que estudaremos no próximo capítulo) e para o passo (ii) Gödel prova $\mathsf{HA} \vdash A \;\Rightarrow\; \mathsf{T} \vdash A_D(\underline{t}, \underline{y})$ (para certos termos $\underline{t}$ não contendo $\underline{y}$) donde se conclui $\mathsf{T} \nvdash 0 = 1 \;\Rightarrow\; \mathsf{HA} \nvdash 0 = 1$ (isto é, se T é consistente, então HA também o é).

Nota biográfica 79. Kurt Gödel (1906–1978) foi um lógico e filósofo da matemática nascido no antigo império austro-húngaro. Ao longo da sua vida teve cinco nacionalidades (contando duas vezes a austríaca): foi cidadão austríaco por nascimento, tornou-se cidadão checo automaticamente quando o império austro-húngaro caiu, aos 23 anos voltou a ser cidadão austríaco por opção, tornou-se cidadão alemão automaticamente quando a Alemanha anexou a Áustria, e terminada a Segunda Guerra Mundial tornou-se cidadão dos EUA.

Durante a sua juventude os interesses de Gödel derivaram das línguas para a história, filosofia, física e matemática. Interessou-se pela lógica matemática ao participar num seminário de Moritz Schlick sobre [Russell 1920] de Bertrand Russell. Esse interesse foi consolidado ao assistir a uma palestra de David Hilbert sobre completude e consistência. Seria o tema da completude o escolhido para a sua tese de doutoramento, na qual demonstra em 1929 o seu teorema da completude. Em 1931 demonstra os seus mais famosos resultados, os dois teoremas da incompletude. Em 1940 publica uma demonstração da consistência do axioma da escolha e da hipótese do contínuo com os axiomas da teoria dos conjuntos.

Em 1938 Gödel casa e em Janeiro de 1940 foge para os EUA com medo de ser recrutado para combater na Segunda Guerra Mundial pelo exército alemão. Vai integrar o Instituto para Estudos Avançados (IEA) em Princeton, EUA, onde também se encontrava Albert Einstein de quem foi amigo pessoal.

A saúde mental de Gödel era frágil. Já em criança dava sinais de alguma perturbação ao acreditar que uma febre reumática lhe danificara permanentemente o coração, apesar de ter recuperado completamente. A preocupação com a saúde em geral acompanhou-o para o resto da vida. Em adulto, o assassinato de Schlick por um aluno, o excesso de trabalho e viagens frequentes ao IEA estiveram na origem de um esgotamento e de uma depressão. Tinha uma personalidade tímida e excêntrica e sofria de paranóia. Acreditava que o tentavam assassinar envenenando o ar e a comida, razão pela qual só confiava na comida feita pela sua mulher. Quando esta ficou demasiado doente para cozinhar, Gödel morreu à fome, num hospital, por recusar-se a comer.

Capítulo 3

Traduções negativas de Kuroda e de Krivine

Neste capítulo apresentamos duas traduções negativas, a de Kuroda Ku e a de Krivine, esta última em duas versões, Kr e Kr_m. Estas traduções negativas N interpretam PA_0^ω em HA_0^ω no seguinte sentido: $\mathsf{PA}_0^\omega \vdash A \;\Rightarrow\; \mathsf{HA}_0^\omega \vdash A^N$.

O nome *tradução negativa* parece ter três justificações.

1. As duplas negações que aparecem nas fórmulas traduzidas, por exemplo, $(A_{at})^{Ku} \equiv \neg\neg A_{at} \equiv (A_{at})^{Kr}$, onde A_{at} é uma fórmula atómica.

2. Algumas equivalências intuicionistas com duplas negações como

$$\neg\neg(\forall x A)_{Ku} \leftrightarrow (\forall x A)_{Ku}, \quad \neg\neg(\neg A)_{Kr} \leftrightarrow (\neg A)_{Kr}, \quad \neg\neg(\exists x A)_{Kr} \leftrightarrow (\exists x A)_{Kr}.$$

3. A^{Ku} e A^{Kr} são intuicionisticamente equivalentes a *fórmulas negativas*, isto é, formulas nas quais apenas ocorrem $\wedge$, $\rightarrow$ e $\forall$ e cujas subfórmulas atómicas estão negadas.

3.1 Tradução negativa de Kuroda

Definição 80. Para cada fórmula A de PA_0^ω baseado em $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$ e $\exists$, definimos as fórmulas A^{Ku} e A_{Ku}, a primeira delas chamada *tradução negativa de Kuroda* de A, relacionadas por $A^{Ku} :\equiv \neg\neg A_{Ku}$, por indução na complexidade das fórmulas:

1. se A é fórmula atómica, então $A_{Ku} :\equiv A$;

2. $(A \diamond B)_{Ku} :\equiv A_{Ku} \diamond B_{Ku}$, onde $\diamond \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;

3. $(\exists x A)_{Ku} :\equiv \exists x A_{Ku}$;

4. $(\forall x A)_{Ku} :\equiv \forall x \neg\neg A_{Ku}$.

Uma forma fácil de descrever A_{Ku} é dizer que resulta de introduzir uma dupla negação na matriz de cada quantificação universal em A.

De seguida calculamos a Ku-tradução para o símbolo lógico definido $\neg$.

Proposição 81. *Temos* $(\neg A)_{Ku} \equiv \neg A_{Ku}$.

Demonstração. Trata-se apenas de uma questão de contas. □

Teorema 82 (da correcção de Ku)**.** *Seja A uma fórmula arbitrária de* PA_0^ω.

1. *Se* $\mathsf{PA}_0^\omega \vdash A$*, então* $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A^{Ku}$.

2. *Se* $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash A$*, então* $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} + \mathsf{M} \vdash A^{Ku}$.

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução no comprimento das derivações. Pode ser útil saber que intuicionisticamente temos

$$\begin{array}{rcl} \neg\neg\neg A & \leftrightarrow & \neg A, \\ \neg\neg\forall x A & \to & \forall x \neg\neg A, \\ \neg\neg(A \to B) & \leftrightarrow & (\neg\neg A \to \neg\neg B) \\ & \leftrightarrow & (A \to \neg\neg B) \\ & \leftrightarrow & \neg\neg(A \to \neg\neg B), \\ \neg\neg A \vee \neg\neg B & \to & \neg\neg(A \vee B), \\ \neg(A \vee B) & \to & \neg A \wedge \neg B, \\ A & \to & \neg\neg A. \end{array}$$

(as quatro primeiras linhas estão demonstradas em [Troelstra 1973], subparágrafo 1.1.8).

1.

<u>LEM</u> Temos
$$(A \vee \neg A)^{Ku} \equiv \neg\neg(A_{Ku} \vee \neg A_{Ku}).$$
Vejamos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg\neg(A_{Ku} \vee \neg A_{Ku})$. Suponhamos $\neg(A_{Ku} \vee \neg A_{Ku})$. Vem $\neg A_{Ku} \wedge \neg\neg A_{Ku}$, logo $\bot$

<u>$A \vee A \to A$, $A \to A \wedge A$, $A \to A \vee B$, $A \wedge B \to A$, $A \vee B \to B \vee A$, $A \wedge B \to B \wedge A$, $\bot \to A$ e $A(t) \to \exists x A(x)$</u> Estes axiomas são fórmulas C tais que $C^{Ku} \equiv \neg\neg C'$ onde C' é uma instanciação do axioma C. Então $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash C'$, logo $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash C^{Ku}$. Por exemplo, para o axioma $A \vee A \to A$ temos

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (A \vee A \to A)^{Ku} \equiv \neg\neg(A_{Ku} \vee A_{Ku} \to A_{Ku}).$$

No caso do axioma $A(t) \to \exists x A(x)$ usamos o facto $A(t)_{Ku} \equiv A_{Ku}(t)$, isto é, $A[t/x]_{Ku} \equiv A_{Ku}[t/x]$ (provamos facilmente por indução na complexidade das fórmulas):

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash [A(t) \to \exists x A(x)]^{Ku} \equiv \neg\neg[A_{Ku}(t) \to \exists x A_{Ku}(x)].$$

<u>$\forall x A(x) \to A(t)$</u> Temos

$$[\forall x A(x) \to A(t)]^{Ku} \equiv \neg\neg[\forall x \neg\neg A_{Ku}(x) \to A_{Ku}(t)]$$

e

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg\neg[\forall x \neg\neg A_{Ku}(x) \to A_{Ku}(t)] \leftrightarrow [\forall x \neg\neg A_{Ku}(x) \to \neg\neg A_{Ku}(t)].$$

Como HA_0^ω deriva o membro direita desta equivalência, então deriva o membro esquerdo.

<u>$A, A \to B \;\Rightarrow\; B$</u> Por hipótese de indução, temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A^{Ku} \equiv \neg\neg A_{Ku}$ e $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (A \to B)^{Ku} \equiv \neg\neg(A_{Ku} \to B_{Ku})$. Vem $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg\neg A_{Ku} \to \neg\neg B_{Ku}$, o que juntamente com $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg\neg A_{Ku}$ implica $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash B^{Ku} \equiv \neg\neg B_{Ku}$.

<u>$A \to B, B \to C \;\Rightarrow\; A \to C$</u> Por hipótese de indução, temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (A \to B)^{Ku} \equiv \neg\neg(A_{Ku} \to B_{Ku})$ e $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (B \to C)^{Ku} \equiv \neg\neg(B_{Ku} \to C_{Ku})$, isto é, $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg\neg A_{Ku} \to \neg\neg B_{Ku}$ e $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg\neg B_{Ku} \to \neg\neg C_{Ku}$. Vem $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg\neg A_{Ku} \to \neg\neg C_{Ku}$, isto é, $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (A \to C)^{Ku} \equiv \neg\neg(A_{Ku} \to C_{Ku})$.

<u>$A \wedge B \to C \;\Leftrightarrow\; A \to (B \to C)$</u> Temos

$$\begin{aligned}
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash [(A \wedge B) \to C]^{Ku} \equiv \neg\neg(A_{Ku} \wedge B_{Ku} \to C_{Ku}) \quad &\Leftrightarrow\\
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A_{Ku} \wedge B_{Ku} \to \neg\neg C_{Ku} \quad &\Leftrightarrow\\
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A_{Ku} \to (B_{Ku} \to \neg\neg C_{Ku}) \quad &\Leftrightarrow\\
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash [A \to (B \to C)]^{Ku} \equiv \neg\neg[A_{Ku} \to (B_{Ku} \to C_{Ku})]&.
\end{aligned}$$

<u>$A \to B \;\Rightarrow\; C \vee A \to C \vee B$</u> Temos

$$\begin{aligned}
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (A \to B)^{Ku} \equiv \neg\neg(A_{Ku} \to B_{Ku}) \quad &\Rightarrow\\
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A_{Ku} \to \neg\neg B_{Ku} \quad &\Rightarrow\\
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash C_{Ku} \vee A_{Ku} \to C_{Ku} \vee \neg\neg B_{Ku} \quad &\Rightarrow\\
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash C_{Ku} \vee A_{Ku} \to \neg\neg C_{Ku} \vee \neg\neg B_{Ku} \quad &\Rightarrow\\
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash C_{Ku} \vee A_{Ku} \to \neg\neg(C_{Ku} \vee B_{Ku}) \quad &\Rightarrow\\
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (C \vee A \to C \vee B)^{Ku} \equiv \neg\neg(C_{Ku} \vee A_{Ku} \to C_{Ku} \vee B_{Ku})&.
\end{aligned}$$

Como, por hipótese de indução, temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (A \to B)^{Ku}$, vem $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (C \vee A \to C \vee B)^{Ku}$.

<u>$B \to A \;\Rightarrow\; B \to \forall x A$ e $A \to B \;\Rightarrow\; \exists x A \to B$</u> Temos

$$\begin{aligned}
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (B \to A)^{Ku} \equiv \neg\neg(B_{Ku} \to A_{Ku}) \quad &\Rightarrow\\
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash B_{Ku} \to \neg\neg A_{Ku} \quad &\Rightarrow\\
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash B_{Ku} \to \forall x \neg\neg A_{Ku} \quad &\Rightarrow\\
\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (A \to B)^{Ku} \equiv \neg\neg(B_{Ku} \to \forall x \neg\neg A_{Ku})&,
\end{aligned}$$

onde na segunda implicação usámos $x \notin FV(B) = FV(B_{Ku})$. Como, por hipótese de indução, temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (B \to A)^{Ku}$, vem $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (A \to B)^{Ku}$. Analogamente verificamos o resultado para $A \to B \;\Rightarrow\; \exists x A \to B$.

$\underline{\Pi,\ \Sigma,\ \underline{R},\text{ e axiomas de } =_0 \text{ e } S}$ Estes axiomas são fórmulas A sem quantificadores, logo $A^{Ku} \equiv \neg\neg A$, e portanto de $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A$ vem $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A^{Ku}$.

$\underline{\mathsf{IR}}$ Por hipótese de indução, temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(0)^{Ku} \equiv \neg\neg A(0)_{Ku} \equiv \neg\neg A_{Ku}(0)$ e

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash [A(x) \to A(Sx)]^{Ku} \equiv \neg\neg[A(x)_{Ku} \to A(Sx)_{Ku}] \equiv \neg\neg[A_{Ku}(x) \to A_{Ku}(Sx)].$$

Vem $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg\neg A_{Ku}(x) \to \neg\neg A_{Ku}(Sx)$. Por IR vem $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash [A(x)]^{Ku} \equiv \neg\neg A_{Ku}(x)$.

2. Seja $A :\equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} B_{sq}(\underline{x}, \underline{y}) \to \exists \underline{Y} \forall \underline{x} B_{sq}(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x})$, onde B_{sq} é uma fórmula sem quantificadores. Atendendo à alínea anterior, basta vermos que $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} + \mathsf{M} \vdash A^{Ku}$. Em HA_0^ω derivamos

$$\begin{array}{rcl}
[\forall \underline{x} \neg\neg \exists \underline{y} B_{sq}(\underline{x}, \underline{y}) \to \exists \underline{Y} \forall \underline{x} \neg\neg B_{sq}(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x})] & \to & \\
{[\forall x_1 \neg\neg \cdots \forall x_k \neg\neg \exists \underline{y} B_{sq}(\underline{x}, \underline{y}) \to \exists \underline{Y} \forall \underline{x} \neg\neg B_{sq}(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x})]} & \to & \\
{[\forall x_1 \neg\neg \cdots \forall x_k \neg\neg \exists \underline{y} B_{sq}(\underline{x}, \underline{y}) \to \exists \underline{Y} \forall x_1 \neg\neg \cdots \forall x_k \neg\neg B_{sq}(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x})]} & \to & \\
\neg\neg[\forall x_1 \neg\neg \cdots \forall x_k \neg\neg \exists \underline{y} B_{sq}(\underline{x}, \underline{y}) \to \exists \underline{Y} \forall x_1 \neg\neg \cdots \forall x_k \neg\neg B_{sq}(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x})] & \equiv & A^{Ku},
\end{array}$$

onde primeira fórmula deriva-se em $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} + \mathsf{M}$. □

Teorema 83 (da caracterização de Ku)**.** *Para toda a fórmula A de PA_0^ω, temos $\mathsf{PA}_0^\omega \vdash A \leftrightarrow A^{Ku}$.*

Demonstração. Fazemos facilmente a demonstração por indução na complexidade das fórmulas. Observemos que o facto de a lógica em questão ser clássica (o teorema é em PA_0^ω, não HA_0^ω) é determinante (para podermos usar LDN). □

Observação 84. Analogamente à observação 73, podemos concluir que nas duas alíneas do teorema da correcção de Ku não faltam princípios (na segunda alínea convém ter em contra que $\mathsf{PA}_0^\omega \vdash \mathsf{M}$).

Como aplicação simples do teorema da correcção de Ku, vamos provar que PA_0^ω é conservativo sobre HA_0^ω para fórmulas sem quantificadores. Este resultado não resulta simplesmente de LEM valer em HA_0^ω para fórmulas sem quantificadores, porque uma derivação de uma fórmula sem quantificadores em PA_0^ω pode envolver a aplicação de LEM a fórmulas com quantificadores, e portanto pode não ser uma derivação da fórmula sem quantificadores em HA_0^ω.

Teorema 85 (da conservação por Ku)**.** *Seja A_{sq} uma fórmula sem quantificadores de PA_0^ω. Se $\mathsf{PA}_0^\omega \vdash A_{sq}$, então $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A_{sq}$.*

Demonstração. Pelo teorema da correcção de Ku temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (A_{sq})^{Ku} \equiv \neg\neg A_{sq}$. Como A_{sq} não tem quantificadores, então LDN vale para A_{sq} em HA_0^ω, logo de $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg\neg A_{sq}$ concluímos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A_{sq}$. □

Nota histórica 86. A primeira tradução negativa parecer ser de Andrey Nikolaevich Kolmogorov de 1925. Esta tradução introduz uma dupla negação antes de cada subfórmula (o que inclui a própria fórmula). No entanto, talvez por o artigo de Kolmogorov estar escrito em russo, recebeu pouca atenção.

Em 1933, Gödel apresenta em [Gödel 1933] uma tradução negativa g (numa linguagem baseada em $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ e $\forall$) definida por $(A_{at})^g :\equiv A_{at}$ (onde A_{at} é uma fórmula atómica), $(\neg A)^g :\equiv \neg A^g$, $(A \wedge B)^g :\equiv A^g \wedge B^g$, $(A \vee B)^g :\equiv \neg(\neg A^g \wedge \neg B^g)$, $(A \to B)^g :\equiv \neg(A^g \wedge \neg B^g)$ e $(\forall x A)^g :\equiv \forall x A^g$, e demonstra que se (uma versão) da aritmética de Peano deriva A, então (uma versão) da aritmética de Heyting deriva A^g.

Também em 1933, Gentzen e Paul Bernays encontram uma tradução negativa g' que difere da de Gödel apenas por preservar $\to$ (isto é, $(A \to B)^{g'} :\equiv A^{g'} \to B^{g'}$) e demonstram um teorema da correcção análogo, mas Gentzen desiste de publicar o seu artigo ao saber do resultado de Gödel.

A tradução negativa de Kuroda surge em 1951 no artigo [Kuroda 1955] de Sigekatu Kuroda.

Nota biográfica 87. Sigekatu Kuroda (1905–1972) foi um matemático japonês com interesses em teoria dos números, lógica, teoria dos tipos, arquitectura de computadores, estrutura de dados, teoria dos grafos e bioinformática. Fez os seus estudos na Universidade Imperial de Tóquio. Leccionou nessa universidade, na Universidade de Ochanomizu em Tóquio, na Universidade de Nagoya (tendo sido reitor desta durante o ano académico de 1953–54) e na Universidade de Maryland.

3.2 Tradução negativa de Krivine

Definição 88. Para cada fórmula A de PA_0^ω baseado em $\neg$, $\vee$, e $\forall$, definimos as fórmulas A^{Kr} e A_{Kr}, a primeira delas chamada *tradução negativa de Krivine* de A, relacionadas por $A^{Kr} :\equiv \neg A_{Kr}$, por indução na complexidade das fórmulas:

1. se A é fórmula atómica, então $A_{Kr} :\equiv \neg A$;
2. $(\neg A)_{Kr} :\equiv \neg A_{Kr}$;
3. $(A \vee B)_{Kr} :\equiv A_{Kr} \wedge B_{Kr}$;
4. $(\forall x A)_{Kr} :\equiv \exists x A_{Kr}$.

Se estivermos a encarar A^{Kr} e A_{Kr} como fórmulas baseadas em $\neg$, $\vee$ e $\forall$, então o símbolo $\neg$ que surge em $A^{Kr} :\equiv \neg A_{Kr}$ e nas alíneas 1 e 2 é um símbolo primitivo, e os símbolos $\wedge$ e $\exists$ que surgem respectivamente nas alíneas 3 e 4 são símbolos definidos. Por exemplo, $(A \vee B)_{Kr} :\equiv A_{Kr} \wedge B_{Kr}$ significa $(A \vee B)_{Kr} :\equiv \neg(\neg A_{Kr} \vee \neg B_{Kr})$. Se estivermos a encarar A^{Kr} e A_{Kr} como baseadas em $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$ e $\exists$ (por exemplo, como fórmulas de HA_0^ω), então o símbolo $\neg$ que surge é um símbolo definido e os símbolos $\wedge$ e $\exists$ que surgem são primitivos. Por exemplo, $(A \vee B)_{Kr} :\equiv A_{Kr} \wedge B_{Kr}$ *não* significa $(A \vee B)_{Kr} :\equiv \neg(\neg A_{Kr} \vee \neg B_{Kr})$.

De seguida calculamos a Kr-tradução dos símbolos lógicos definidos.

Proposição 89. *Temos*

1. $(A \to B)_{Kr} \equiv \neg A_{Kr} \wedge B_{Kr}$;
2. $(A \wedge B)_{Kr} \equiv \neg(\neg A_{Kr} \wedge \neg B_{Kr})$;
3. $(\exists x A)_{Kr} \equiv \neg \exists x \neg A_{Kr}$.

Demonstração. Trata-se apenas de uma questão de contas. □

Teorema 90 (da correcção de Kr)**.** *Seja A uma fórmula arbitrária de PA_0^ω baseado em $\neg$, $\vee$ e $\forall$. Encaremos A^{Kr} como sendo uma fórmula baseada em $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$ e $\exists$. Se $\mathsf{PA}_0^\omega \vdash A$, então $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A^{Kr}$.*

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução no comprimento das derivações. Pode ser útil saber que intuicionisticamente temos

$$\begin{array}{rcl} \neg A \vee \neg B & \to & \neg(A \wedge B), \\ A \wedge (B \wedge C) & \leftrightarrow & (A \wedge B) \wedge C, \\ \dfrac{\neg(A \wedge B) \quad \neg(\neg A \wedge C)}{\neg(B \wedge C)} & & \dfrac{\neg(A \wedge B)}{\neg(\exists x A \wedge B)} \text{ se } x \notin FV(B), \end{array}$$

onde as regras significam

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg(A \wedge B), \neg(\neg A \wedge C) & \Rightarrow & \mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg(B \wedge C), \\ \mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg(A \wedge B) & \Rightarrow & \mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg(\exists x A \wedge B) \text{ se } x \notin FV(B). \end{array}$$

$\underline{\neg A \vee A}$ Temos

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (\neg A \vee A)^{Kr} \equiv \neg(\neg A_{Kr} \wedge A_{Kr}).$$

$\underline{\forall x A(x) \to A(t)}$ Temos

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash [\forall x A(x) \to A(t)]^{Kr} \equiv \neg[\neg \exists x A_{Kr}(x) \wedge A_{Kr}(t)],$$

porque $A(t)_{Kr} \equiv A_{Kr}(t)$, isto é, $A[t/x]_{Kr} \equiv A_{Kr}[t/x]$ (provamos facilmente por indução na complexidade das fórmulas).

$\underline{A \ \Rightarrow \ B \vee A}$ Temos

$$\begin{array}{rcl} A^{Kr} & \equiv & \neg A_{Kr}, \\ (B \vee A)^{Kr} & \equiv & \neg(B_{Kr} \wedge A_{Kr}). \end{array}$$

Por hipótese de indução, temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A^{Kr}$, donde concluímos facilmente $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (B \vee A)^{Kr}$.

$\underline{A \vee A \;\Rightarrow\; A}$ Temos

$$\begin{array}{rcl} (A \vee A)^{Kr} & \equiv & \neg(A_{Kr} \wedge A_{Kr}), \\ A^{Kr} & \equiv & \neg A_{Kr}. \end{array}$$

Por hipótese de indução, temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg(A_{Kr} \wedge A_{Kr})$. Como $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A_{Kr} \wedge A_{Kr} \leftrightarrow A_{Kr}$, segue-se $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg A_{Kr}$.

$\underline{A \vee (B \vee C) \;\Rightarrow\; (A \vee B) \vee C}$ Temos

$$\begin{array}{rcl} [A \vee (B \vee C)]^{Kr} & \equiv & \neg[A_{Kr} \wedge (B_{Kr} \wedge C_{Kr})], \\ [(A \vee B) \vee C]^{Kr} & \equiv & \neg[(A_{Kr} \wedge B_{Kr}) \wedge C_{Kr}]. \end{array}$$

Por hipótese de indução, temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg[A_{Kr} \wedge (B_{Kr} \wedge C_{Kr})]$. Como $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A_{Kr} \wedge (B_{Kr} \wedge C_{Kr}) \leftrightarrow (A_{Kr} \wedge B_{Kr}) \wedge C_{Kr}$, segue-se $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg[(A_{Kr} \wedge B_{Kr}) \wedge C_{Kr}]$.

$\underline{A \vee B, \neg A \vee C \;\Rightarrow\; B \vee C}$ Temos

$$\begin{array}{rcl} (A \vee B)^{Kr} & \equiv & \neg(A_{Kr} \wedge B_{Kr}), \\ (\neg A \vee B)^{Kr} & \equiv & \neg(\neg A_{Kr} \wedge C_{Kr}), \\ (B \vee C)^{Kr} & \equiv & \neg(B_{Kr} \wedge C_{Kr}). \end{array}$$

Por hipótese de indução, temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg(A_{Kr} \wedge B_{Kr})$ e $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg(\neg A_{Kr} \wedge C_{Kr})$, logo pela primeira regra mencionada no início da demonstração vem $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg(B_{Kr} \wedge C_{Kr})$.

$\underline{A \vee B \;\Rightarrow\; \forall x A \vee B}$ Temos

$$\begin{array}{rcl} (A \vee B)^{Kr} & \equiv & \neg(A_{Kr} \wedge B_{Kr}), \\ (\forall x A \vee B)^{Kr} & \equiv & \neg(\exists x A_{Kr} \wedge B_{Kr}). \end{array}$$

Por hipótese de indução, temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg(A_{Kr} \wedge B_{Kr})$, logo pela segunda regra mencionada no início da demonstração vem $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg(\exists x A_{Kr} \wedge B_{Kr})$.

$\underline{\Pi, \Sigma \text{ e } R}$ Estes axiomas são equivalências $A \leftrightarrow B$ onde A e B são fórmulas atómicas. Temos

$$(A \leftrightarrow B)^{Kr} \equiv \neg\neg[\neg(\neg\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg\neg B \wedge \neg A)].$$

Provamos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (A \leftrightarrow B)^{Kr}$ usando $A \leftrightarrow B$.

$\underline{x =_0 x \text{ e } Sx \neq_0 0}$ Estes axiomas são fórmulas A tais que $A^{Kr} \equiv \neg\neg A$, pelo que provamos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A^{Kr}$ recorrendo ao próprio A.

$\underline{Sx =_0 Sy \to x =_0 y}$ Temos

$$(Sx =_0 Sy \to x =_0 y)^{Kr} \equiv \neg(\neg Sx \neq_0 Sy \wedge x \neq_0 y).$$

Provemos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg(\neg Sx \neq_0 Sy \wedge x \neq_0 y)$. Se $\neg Sx \neq_0 Sy \wedge x \neq_0 y$, então $x \neq_0 y$, logo pelo contra-recíproco de $Sx =_0 Sy \to x =_0 y$ vem $Sx \neq_0 Sy$, donde juntamente com $\neg Sx \neq_0 Sy$ vem $\perp$.

$\underline{x =_0 y \wedge A(x) \to A(y)}$ Temos

$$[x =_0 y \wedge A(x) \to A(y)]^{Kr} \equiv \neg\big[\neg\neg\big(\neg\neg x =_0 y \wedge \neg\neg A(x)\big) \wedge \neg A(y)\big].$$

Provemos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg\big[\neg\neg\big(\neg\neg x =_0 y \wedge \neg\neg A(x)\big) \wedge \neg A(y)\big]$. Suponhamos $\neg\neg\big(\neg\neg x =_0 y \wedge \neg\neg A(x)\big) \wedge \neg A(y)$. Usando LDN para fórmulas sem quantificadores obtemos $x =_0 y \wedge A(x)$. Daqui sai $A(y)$, donde juntamente com $\neg A(y)$ vem $\perp$.

$\underline{\mathsf{IR}}$ Temos

$$\begin{array}{rcl} A(0)^{Kr} & \equiv & \neg A_{Kr}(0), \\ [A(x) \to A(Sx)]^{Kr} & \equiv & \neg[\neg A_{Kr}(x) \wedge A_{Kr}(Sx)], \\ A(x)^{Kr} & \equiv & \neg A_{Kr}(x). \end{array}$$

Por hipótese de indução, suponhamos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg A_{Kr}(0)$ e $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg[\neg A_{Kr}(x) \wedge A_{Kr}(Sx)]$. Provemos que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg A_{Kr}(x)$. Por IR é suficiente provar que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg A_{Kr}(x) \to \neg A_{Kr}(Sx)$, o que fazemos a partir de $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg[\neg A_{Kr}(x) \wedge A_{Kr}(Sx)]$. □

Teorema 91 (da caracterização de Kr)**.** *Para toda a fórmula A de PA_0^ω baseado em $\neg$, $\vee$ e $\forall$, temos $\mathsf{PA}_0^\omega \vdash A \leftrightarrow A^{Kr}$ (onde A^{Kr} tanto pode ser encarado como uma fórmula de uma linguagem baseada em $\neg$, $\vee$ e $\forall$ como baseada em $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$ e $\exists$).*

Demonstração. Fazemos facilmente a demonstração por indução na complexidade das fórmulas. □

Observação 92. Analogamente à observação 73, podemos concluir que no teorema da correcção de Kr não faltam princípios.

Nota histórica 93. A tradução negativa de Krivine aparece pela primeira vez no artigo [Krivine 1990] de Jean-Louis Krivine, no contexto das fórmulas escritas apenas com $\to$ e $\forall$ e do cálculo de predicados de segunda ordem. Em [Reus e Streicher 1998] Thomas Streicher e Bernhard Reus estendem a tradução negativa de Krivine aos restantes símbolos lógicos.

3.3 Tradução negativa de Krivine modificada

A tradução de Krivine de um conjunção é

$$(A \wedge B)^{Kr} \equiv [\neg(\neg A \vee \neg B)]^{Kr} \equiv \neg\neg(\neg A_{Kr} \wedge \neg B_{Kr}),$$

o que não é muito simples. Se adoptarmos $\wedge$ como símbolo lógico primitivo e definirmos $(A \wedge B)_{Kr} :\equiv A_{Kr} \vee B_{Kr}$, obtemos uma simplificação. É isso que fazemos de seguida.

Definição 94. Para cada fórmula A de PA_0^ω baseado em $\neg$, $\wedge$, $\vee$, e $\forall$, definimos as fórmulas A^{Kr_m} e A_{Kr_m}, a primeira delas chamada *tradução negativa de Krivine modificada* de A, relacionadas por $A^{Kr_m} :\equiv \neg A_{Kr_m}$, por indução na complexidade das fórmulas:

1. se A é fórmula atómica, então $A_{Kr_m} :\equiv \neg A$;
2. $(\neg A)_{Kr_m} :\equiv \neg A_{Kr_m}$;
3. $(A \wedge B)_{Kr_m} :\equiv A_{Kr_m} \vee B_{Kr_m}$;
4. $(A \vee B)_{Kr_m} :\equiv A_{Kr_m} \wedge B_{Kr_m}$;
5. $(\forall x A)_{Kr_m} :\equiv \exists x A_{Kr_m}$.

Se estivermos a encarar A^{Kr_m} e A_{Kr_m} como fórmulas baseadas em $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\forall$, então o símbolo $\neg$ que surge em $A^{Kr_m} :\equiv \neg A_{Kr_m}$ e nas alíneas 1 e 2 é um símbolo primitivo, e o símbolo $\exists$ que surge na alínea 5 é um símbolo definido. Por exemplo, $(\forall x A)_{Kr_m} :\equiv \exists x A_{Kr_m}$ significa $(\forall x A)_{Kr_m} :\equiv \neg\forall x \neg A_{Kr_m}$.
Se estivermos a encarar A^{Kr_m} e A_{Kr_m} como fórmulas baseadas em $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$ e $\exists$ (por exemplo, como fórmulas de HA_0^ω), então o símbolo $\neg$ que surge é um símbolo definido e o símbolo $\exists$ é um símbolo primitivo. Por exemplo, $(\forall x A)_{Kr_m} :\equiv \exists x A_{Kr_m}$ *não* significa $(\forall x A)_{Kr_m} :\equiv \neg\forall x \neg A_{Kr_m}$.

Uma vez que alterámos a tradução, o teorema da correcção tem de ser revisto. No entanto, só os casos das regras e axiomas afectados pela alteração é que precisam de ser verificados.

Teorema 95 (da correcção de Kr_m)**.** *Seja A uma fórmula arbitrária de PA_0^ω baseado em $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\forall$. Encaremos A^{Kr_m} como sendo uma fórmula baseada em $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$ e $\exists$. Se $\mathsf{PA}_0^\omega \vdash A$, então $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A^{Kr_m}$.*

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução no comprimento das derivações. Todos os casos são análogos aos do teorema da correcção de Kr, excepto os seguintes.

Σ, Π e $\underline{R}$ Estes axiomas são equivalências $A \leftrightarrow B$ onde A e B são fórmulas atómica. Temos

$$(A \leftrightarrow B)^{Kr_m} \equiv \neg[(\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg\neg B \wedge \neg A)].$$

Provamos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg[(\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg\neg B \wedge \neg A)]$ usando $A \leftrightarrow B$.

$x =_0 y \wedge A(x) \to A(y)$ Temos

$$[x =_0 y \wedge A(x) \to A(y)]^{Kr_m} \equiv \neg\big[\neg\big(x \neq_0 y \vee \neg A(x)\big) \wedge \neg A(y)\big].$$

Provemos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg\big[\neg\big(x \neq_0 y \vee \neg A(x)\big) \wedge \neg A(y)\big]$. Suponhamos $\neg\big(x \neq_0 y \vee \neg A(x)\big) \wedge \neg A(y)$. Intuicionisticamente temos $\neg(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow A \wedge B$ para fórmulas A e B para as quais valha LEM. Então temos $[x =_0 y \wedge A(x)] \wedge \neg A(y)$. Logo temos $\neg A(y)$ e por $x =_0 y \wedge A(x) \to A(y)$ temos $A(y)$, donde concluímos $\bot$.

$\underline{A \wedge B \to A}$ Temos

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (A \wedge B \to A)^{Kr_m} \equiv \neg[\neg(A_{Kr_m} \vee B_{Kr_m}) \wedge A_{Kr_m}].$$

$\underline{A \wedge B \to B}$ Análogo ao caso anterior.

$\underline{A \to (B \to A \wedge B)}$ Temos

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash [A \to (B \to A \wedge B)]^{Kr_m} \equiv \neg\big[\neg A_{Kr_m} \wedge \big(\neg B_{Kr_m} \wedge (A_{Kr_m} \vee B_{Kr_m})\big)\big]. \quad \square$$

Teorema 96 (da caracterização de Kr_m)**.** *Para toda a fórmula A de PA_0^ω baseado em $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\forall$, temos $\mathsf{PA}_0^\omega \vdash A \leftrightarrow A^{Kr_m}$ (onde A^{Kr_m} tanto pode ser encarado como uma fórmula de uma linguagem baseada em $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\forall$ como baseada em $\bot$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$ e $\exists$).*

Demonstração. Fazemos facilmente a demonstração por indução na complexidade das fórmulas. $\square$

Observação 97. Analogamente à observação 73, podemos concluir que no teorema da correcção de Kr_m não faltam princípios.

Capítulo 4

Composição da interpretação funcional de Gödel com a tradução negativa de Kuroda

Vimos nos dois capítulos anteriores que a D-tradução interpreta HA_0^ω em HA_0^ω (isto é, o seu teorema da correcção tem hipótese em $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{P}$ para certos princípios P e tese em HA_0^ω) e extrai termos (isto é, o seu teorema da correcção dá termos $\underline{t}$) e que a Ku-tradução interpreta PA_0^ω em HA_0^ω, mas não extrai termos. Vamos compor as duas para obter uma interpretação $Ku\,D$ de PA_0^ω em HA_0^ω que extrai termos.

$$\mathsf{PA}_0^\omega \xrightarrow{Ku} \mathsf{HA}_0^\omega \xrightarrow{D} \mathsf{HA}_0^\omega$$

Teorema 98 (da correcção de $Ku\,D$)**.** *Sejam A é uma fórmula arbitrária de PA_0^ω, $\underline{l}$ todas as variáveis livres de A e $(A^{Ku})^D \equiv \exists \underline{x} \exists \underline{y} (A^{Ku})_D(\underline{x}, \underline{y})$. Se $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash A$, então existe um uplo de termos fechados $\underline{t}$ de HA_0^ω, que pode ser calculado a partir de uma derivação de A, tal que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall \underline{y} (A^{Ku})_D(\underline{t}\underline{l}, \underline{y})$.*

Demonstração. Pelo teorema da correcção de Ku, temos $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} + \mathsf{M} \vdash A^{Ku}$. Pelo teorema da correcção de D, de $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} + \mathsf{M} \vdash A^{Ku}$ vem que existe um uplo de termos fechados $\underline{t}$ de HA_0^ω tal que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall \underline{y} (A^{Ku})_D(\underline{t}\underline{l}, \underline{y})$, onde as variáveis livres $\underline{l}$ de A são também as variáveis livres $\underline{l}$ de A^{Ku}. Os termos $\underline{t}$ podem ser calculados a partir de uma derivação de A^{Ku}, que por sua vez pode ser calculada a partir de uma derivação de A. □

Teorema 99 (da caracterização de $Ku\,D$)**.** *Para toda a fórmula A de PA_0^ω, temos $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash A \leftrightarrow (A^{Ku})^D$.*

Demonstração. Pelo teorema da caracterização de Ku temos $\mathsf{PA}_0^\omega \vdash A \leftrightarrow A^{Ku}$. Pelo teorema da caracterização de D temos $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} + \mathsf{IP} + \mathsf{M} \vdash A^{Ku} \leftrightarrow (A^{Ku})^D$. Então $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} + \mathsf{IP} + \mathsf{M} \vdash A \leftrightarrow (A^{Ku})^D$. O resultado vem agora de notar que os princípios IP e M são deriváveis em PA_0^ω. □

Observação 100. Analogamente à observação 73, podemos concluir que no teorema da correcção de $Ku\,D$ não faltam princípios.

Teorema 101 (da extracção de programas por $Ku\,D$)**.** *Seja $A_{sq}(x,y)$ uma fórmula sem quantificadores de PA_0^ω tal que $FV(A_{sq}) = \{x,y\}$. Se $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash \forall x \exists y A_{sq}(x,y)$, então existe um termo fechado t de HA_0^ω, que pode ser calculado a partir de uma derivação de $\forall x \exists y A_{sq}(x,y)$, tal que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall x A_{sq}(x,tx)$.*

Demonstração. De $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash \forall x \exists y A_{sq}(x,y)$ vem, pelo teorema da correcção de Ku,

$$\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} + \mathsf{M} \vdash [\forall x \exists y A_{sq}(x,y)]^{Ku} \equiv \neg\neg\forall x \neg\neg\exists y A_{sq}(x,y).$$

Usando $\neg\neg\forall x B \to \forall x \neg\neg B$ (que vale intuicionisticamente) e M vem

$$\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} + \mathsf{M} \vdash \forall x \exists y A_{sq}(x,y).$$

Aplicamos agora o teorema da extracção de programas por D a $\forall x \exists y A_{sq}(x,y)$ e obtemos o resultado. $\square$

Teorema 102 (da conservação por $Ku\,D$)**.** *Seja A_{sq} uma fórmula sem quantificadores de PA_0^ω. Se $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash \forall x \exists y A_{sq}$, então $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall x \exists y A_{sq}$.*

Demonstração. Repetindo os argumentos do teorema da extracção de programas por $Ku\,D$, obtemos $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} + \mathsf{M} \vdash \forall x \exists y A_{sq}$. Aplicamos agora o teorema da conservação por D a $\forall x \exists y A_{sq}$ e obtemos o resultado. $\square$

Capítulo 5

Tradução de Shoenfield

5.1 Tradução de Shoenfield

Vimos no capítulo anterior que a D-tradução, que interpreta HA_0^ω em HA_0^ω, pode ser combinada com Kr-tradução, que interpreta PA_0^ω em HA_0^ω, obtendo-se uma interpretação $Ku\,D$ de PA_0^ω em HA_0^ω. Vamos de seguida estudar uma interpretação funcional, devida a Shoenfield ([Shoenfield 1967]), que interpreta directamente PA_0^ω em HA_0^ω sem fazer um "desvio" como $Ku\,D$.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{PA}_0^\omega \arrow[r, "Ku"] \arrow[rr, bend right, "S"'] & \mathsf{HA}_0^\omega \arrow[r, "D"] & \mathsf{HA}_0^\omega \end{tikzcd}$$

A tradução de Shoenfield pode ser motivada da seguinte forma. A cada fórmula A pretendemos associar uma fórmula $A^S \equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_S(\underline{x}, \underline{y})$ onde A_S não tem quantificadores. No caso de A ser atómica, a forma natural de A^S não ter quantificadores é pôr $A^S \equiv A$ (portanto $\underline{x}$ e $\underline{y}$ são os uplos vazios e $A_S \equiv A$). Suponhamos que já definimos $A^S \equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_S(\underline{x}, \underline{y})$ e $B^S \equiv \forall \underline{x'} \exists \underline{y'} B_S(\underline{x'}, \underline{y'})$. Então em $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC}$ temos

$$\begin{array}{rcl} A^S \vee B^S & \leftrightarrow & \forall \underline{x}, \underline{x'} \exists \underline{y}, \underline{y'} [A_S(\underline{x}, \underline{y}) \vee B_S(\underline{x'}, \underline{y'})], \\ \forall z A^S & \equiv & \forall z, \underline{x} \exists \underline{y} A_S(\underline{x}, \underline{y}), \\ \neg A^S & \leftrightarrow & \exists \underline{x} \forall \underline{y} \neg A_S(\underline{x}, \underline{y}) \\ & \leftrightarrow & \forall \underline{Y} \exists \underline{x} \neg A_S(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}), \end{array}$$

onde na primeira equivalência usámos prenifixação e na última equivalência usámos o contra-recíproco de $\mathsf{QF\text{-}AC}$. Isto sugere a seguinte definição.

Definição 103. Para cada fórmula A de PA_0^ω baseado em $\neg$, $\vee$, e $\forall$ (onde como habitualmente definimos $A \wedge B :\equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$, $A \to B :\equiv \neg A \vee B$, $\exists x A :\equiv \neg \forall x \neg A$ e $\perp :\equiv 0 =_0 S0$), definimos as fórmulas A^S e A_S de PA_0^ω, a primeira delas chamada *tradução de Shoenfield* de A, por indução na complexidade das fórmulas.

1. Se A é fórmula atómica, então $A^S :\equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_S(\underline{x}, \underline{y}) :\equiv A$ onde $\underline{x}$ e $\underline{y}$ são uplos vazios.

Suponhamos que já definimos $A^S \equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_S(\underline{x}, \underline{y})$ e $B^S \equiv \forall \underline{x'} \exists \underline{y'} B_S(\underline{x'}, \underline{y'})$. Então:

2. $(\neg A)^S :\equiv \forall \underline{Y} \exists \underline{x} (\neg A)_S(\underline{Y}, \underline{x}) :\equiv \forall \underline{Y} \exists \underline{x} \neg A_S(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x})$;

3. $(A \vee B)^S :\equiv \forall \underline{x}, \underline{x'} \exists \underline{y}, \underline{y'} (A \vee B)_S(\underline{x}, \underline{x'}, \underline{y}, \underline{y'}) :\equiv \forall \underline{x}, \underline{x'} \exists \underline{y}, \underline{y'} [A_S(\underline{x}, \underline{y}) \vee B_S(\underline{x'}, \underline{y'})]$;

4. $(\forall z A)^S :\equiv \forall z, \underline{x} \exists \underline{y} (\forall z A)_S(z, \underline{x}, \underline{y}) :\equiv \forall z, \underline{x} \exists \underline{y} A_S(\underline{x}, \underline{y})$.

Numa tradução $A^S \equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_S(\underline{x}, \underline{y})$, supomos que as variáveis $\underline{x}, \underline{y}$ são distintas e não ocorrem livres em A.
Se estivermos a encarar A^S e A_S como fórmulas baseadas em $\neg$, $\vee$ e $\forall$, então o símbolo $\neg$ na alínea 2 é um símbolo primitivo, e o símbolo $\exists$ que surge em todas as alíneas é um símbolo definido.
Se estivermos a encarar A^S e A_S como baseadas em $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$ e $\exists$ (por exemplo, como fórmulas de HA_0^ω), então o símbolo $\neg$ que surge é um símbolo definido e o símbolo $\exists$ é um símbolo primitivo.

Observação 104. Demonstramos facilmente por indução na complexidade das fórmulas que A_S não tem quantificadores e que se A_{sq} é uma fórmula sem quantificadores de PA_0^ω, então $(A_{sq})^S \equiv A_{sq}$.

De seguida calculamos a S-tradução dos símbolos lógicos definidos.

Proposição 105. *Se* $A^S \equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_S(\underline{x}, \underline{y})$ *e* $B^S \equiv \forall \underline{x'} \exists \underline{y'} B_S(\underline{x'}, \underline{y'})$, *então*

1. $(A \to B)^S \equiv \forall \underline{Y}, \underline{x'} \exists \underline{x}, \underline{y'} [\neg A_S(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}) \vee B_S(\underline{x'}, \underline{y'})]$;

2. $(A \wedge B)^S \equiv \forall \underline{X}, \underline{X'} \exists \underline{Y}, \underline{Y'} \neg \big[\neg A_S\big(\underline{XYY'}, \underline{Y}(\underline{XYY'})\big) \vee \neg B_S\big(\underline{X'YY'}, \underline{Y'}(\underline{X'YY'})\big)\big]$;

3. $(\exists z A)^S \equiv \forall \underline{X} \exists z, \underline{Y} \neg\neg A_S\big(\underline{X}z\underline{Y}, \underline{Y}(\underline{X}z\underline{Y})\big)$, *onde* $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg\neg A_S\big(\underline{X}z\underline{Y}, \underline{Y}(\underline{X}z\underline{Y})\big) \leftrightarrow A_S(\underline{X}z\underline{Y}, \underline{Y}(\underline{X}z\underline{Y}))$.

Demonstração. Trata-se apenas de uma questão de contas. A equivalência da alínea 3 resulta de LDN valer em HA_0^ω para a fórmula sem quantificadores $A_S\big(\underline{X}z\underline{Y}, \underline{Y}(\underline{X}z\underline{Y})\big)$. $\square$

Teorema 106 (da correcção de S)**.** *Sejam A uma fórmula arbitrária de* PA_0^ω, $\underline{l}$ *todas variáveis livres de A e* $A^S \equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_S(\underline{x}, \underline{y})$. *Se* $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash A$, *então existe um uplo de termos fechado* $\underline{t}$ *de* PA_0^ω, *que pode ser calculado a partir de uma derivação de A, tal que* $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall \underline{x} A_S(\underline{x}, \underline{t}\,\underline{l}\,\underline{x})$.

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução no comprimento das derivações, construindo explicitamente os termos $\underline{t}$.

Quando conveniente, vamos denotar por $\underline{l}_A$ as variáveis de $FV(A)$, por $\underline{l}_{AB}$ as variáveis de $FV(A) \cup FV(B)$, por $\underline{l}_{A \setminus BC}$ as variáveis de $FV(A) \setminus [FV(B) \cup FV(C)]$ e por $\underline{l}_{AB \setminus (C \setminus DE)}$ as variáveis de $[FV(A) \cup FV(B)] \setminus \big[FV(C) \setminus \big(FV(D) \cup FV(E)\big)\big]$. Iremos também usar os índices A, AB, $A \setminus BC$ e $AB \setminus (C \setminus DE)$ para variáveis relacionadas com $\underline{l}_A$, $\underline{l}_{AB}$, $\underline{l}_{A \setminus BC}$ e $\underline{l}_{AB \setminus (C \setminus DE)}$. Por exemplo, se substituirmos $\underline{l}_{AB}$ por $\underline{\mathcal{O}}$, então podemos denotar $\underline{\mathcal{O}}$ por $\underline{\mathcal{O}}_{AB}$.

$\underline{\neg A \vee A}$ Temos

$$(\neg A \vee A)^S \equiv \forall \underline{Y}, \underline{x'} \exists \underline{x}, \underline{y'} [\neg A_S(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}) \vee A_S(\underline{x'}, \underline{y'})].$$

Os termos

$$\begin{aligned} \underline{t}_{\underline{x}} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{Y}, \underline{x'} \,.\, \underline{x'}, \\ \underline{t}_{\underline{y'}} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{Y}, \underline{x'} \,.\, (\underline{Y}\,\underline{x'}), \end{aligned}$$

estão nas condições pretendidas.

$\underline{\forall z A(z) \to A(q)}$ No caso $z \notin FV\big(A(z)\big)$ era desnecessário aplicar $\forall z A(z) \to A(q)$, pelo que assumimos $z \in FV\big(A(z)\big)$. Então as variáveis de q estão entre as variáveis livres $\underline{l}$ de $\forall z A(z) \to A(q)$. Temos

$$[\forall z A(z) \to A(q)]^S \equiv \forall \underline{Y}, \underline{x'} \exists z, \underline{x}, \underline{y'} [\neg A_S(\underline{x}, \underline{Y} z \underline{x}, z) \vee A_S(\underline{x'}, \underline{y'}, q)],$$

onde usámos $A[q/z]^S \equiv A^S[q/z]$ (que provamos por indução na complexidade das fórmulas). Os termos

$$\begin{aligned} t_z &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{Y}, \underline{x'} \,.\, q, \\ t_{\underline{x}} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{Y}, \underline{x'} \,.\, \underline{x'}, \\ t_{\underline{y'}} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{Y}, \underline{x'} \,.\, (\underline{Y} q \underline{x'}), \end{aligned}$$

estão nas condições pretendidas (convém termos em conta que a fórmula $A_S(\underline{x'}, \underline{Y} q \underline{x'}, q)$ não tem quantificadores e portanto LEM vale em HA_0^ω para ela).

$\underline{A \;\Rightarrow\; B \vee A}$ Temos

$$\begin{aligned} A^S &\equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_S(\underline{x}, \underline{y}), \\ (B \vee A)^S &\equiv \forall \underline{x'}, \underline{x} \exists \underline{y'}, \underline{y} [B_S(\underline{x'}, \underline{y'}) \vee A_S(\underline{x}, \underline{y})]. \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, existem termos fechados $\underline{q}$ tais que $\mathsf{PA}_0^\omega \vdash \forall \underline{x} A_S(\underline{x}, \underline{q}\,\underline{l}_A \underline{x})$. Os termos

$$\begin{aligned} \underline{t}_{\underline{y'}} &:\equiv \lambda \underline{l}_{AB}, \underline{x}, \underline{x'} \,.\, \underline{\mathcal{O}}, \\ \underline{t}_{\underline{y}} &:\equiv \lambda \underline{l}_{AB}, \underline{x}, \underline{x'} \,.\, (\underline{q}\,\underline{l}_A \underline{x}), \end{aligned}$$

(onde o uplo $\underline{\mathcal{O}}$ tem tipo apropriado) estão nas condições pretendidas.

$\underline{A \vee A \ \Rightarrow \ A}$ Temos

$$\begin{aligned} A^S &\equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_S(\underline{x}, \underline{y}), \\ (A \vee A)^S &\equiv \forall \underline{x}, \underline{x}' \exists \underline{y}, \underline{y}' [A_S(\underline{x}, \underline{y}) \vee A_S(\underline{x}', \underline{y}')]. \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, existem termos fechados $\underline{q}_{\underline{y}}, \underline{q}_{\underline{y}'}$ tais que

$$\mathsf{PA}_0^\omega \vdash \forall \underline{x}, \underline{x}' [A_S(\underline{x}, \underline{q}_{\underline{y}} \underline{l}\, \underline{x}\, \underline{x}') \vee A_S(\underline{x}', \underline{q}_{\underline{y}'} \underline{l}\, \underline{x}\, \underline{x}')].$$

Em particular, pondo $\underline{x}' = \underline{x}$ vem

$$\mathsf{PA}_0^\omega \vdash \forall \underline{x} [A_S(\underline{x}, \underline{q}_{\underline{y}} \underline{l}\, \underline{x}\, \underline{x}) \vee A_S(\underline{x}, \underline{q}_{\underline{y}'} \underline{l}\, \underline{x}\, \underline{x})].$$

Como $A_S(\underline{x}, \underline{q}_{\underline{y}} \underline{l}\underline{x}\underline{x})$ não tem quantificadores, então pelo teorema 56 existem termos $\underline{q}$, cujas variáveis são exactamente as de $FV\big(A_S(\underline{x}, \underline{q}_{\underline{y}} \underline{l}\, \underline{x}\, \underline{x})\big)$, isto é, $\underline{l}, \underline{x}$ (porque as variáveis de $FV\big(A_S(\underline{x}, \underline{y})\big)$ são as de $FV(A)$ e $\underline{x}, \underline{y}$), tais que

$$\begin{aligned} \mathsf{HA}_0^\omega \vdash \ &\big[A_S(\underline{x}, \underline{q}_{\underline{y}} \underline{l}\, \underline{x}\, \underline{x}) \to \big(A_S(\underline{x}, \underline{q}) \leftrightarrow A_S(\underline{x}, \underline{q}_{\underline{y}} \underline{l}\, \underline{x}\, \underline{x})\big)\big] \wedge \\ &\big[\neg A_S(\underline{x}, \underline{q}_{\underline{y}} \underline{l}\, \underline{x}\, \underline{x}) \to \big(A_S(\underline{x}, \underline{q}) \leftrightarrow A_S(\underline{x}, \underline{q}_{\underline{y}'} \underline{l}\, \underline{x}\, \underline{x})\big)\big], \end{aligned}$$

isto é (informalmente),

$$\underline{q} = \begin{cases} \underline{q}_{\underline{y}} \underline{l}\, \underline{x}\, \underline{x} & \text{se} \quad A_S(\underline{x}, \underline{q}_{\underline{y}} \underline{l}\, \underline{x}\, \underline{x}) \\ \underline{q}_{\underline{y}'} \underline{l}\, \underline{x}\, \underline{x} & \text{se} \quad \neg A_S(\underline{x}, \underline{q}_{\underline{y}} \underline{l}\, \underline{x}\, \underline{x}) \end{cases}$$

Os termos

$$\underline{t}_{\underline{y}} :\equiv \lambda \underline{l}, \underline{x} \,.\, \underline{q},$$

estão nas condições pretendidas.

$\underline{A \vee (B \vee C) \ \Rightarrow \ (A \vee B) \vee C}$ Temos

$$\begin{aligned} [A \vee (B \vee C)]^S &\equiv \forall \underline{x}, \underline{x}', \underline{x}'' \exists \underline{y}, \underline{y}', \underline{y}'' \big[A_S(\underline{x}, \underline{y}) \vee \big(B_S(\underline{x}', \underline{y}') \vee C_S(\underline{x}'', \underline{y}'')\big)\big], \\ [(A \vee B) \vee C]^S &\equiv \forall \underline{x}, \underline{x}', \underline{x}'' \exists \underline{y}, \underline{y}', \underline{y}'' \big[\big(A_S(\underline{x}, \underline{y}) \vee B_S(\underline{x}', \underline{y}')\big) \vee C_S(\underline{x}'', \underline{y}'')\big]. \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, existem termos fechados $\underline{q}_{\underline{y}}, \underline{q}_{\underline{y}'}, \underline{q}_{\underline{y}''}$ tais que

$$\mathsf{PA}_0^\omega \vdash \forall \underline{x}, \underline{x}', \underline{x}'' \big[A_S(\underline{x}, \underline{q}_{\underline{y}} \underline{l}\, \underline{x}\, \underline{x}'\, \underline{x}'') \vee \big(B_S(\underline{x}', \underline{q}_{\underline{y}'} \underline{l}\, \underline{x}\, \underline{x}'\, \underline{x}'') \vee C_S(\underline{x}'', \underline{q}_{\underline{y}''} \underline{l}\, \underline{x}\, \underline{x}'\, \underline{x}'')\big)\big],$$

logo estão nas condições pretendidas.

$\underline{A \vee B, \neg A \vee C \ \Rightarrow \ B \vee C}$ Temos

$$\begin{aligned} (A \vee B)^S &\equiv \forall \underline{x}, \underline{x}' \exists \underline{y}, \underline{y}' [A_S(\underline{x}, \underline{y}) \vee B_S(\underline{x}', \underline{y}')], \\ (\neg A \vee C)^S &\equiv \forall \underline{Y}, \underline{x}'' \exists \underline{x}, \underline{y}'' [\neg A_S(\underline{x}, \underline{Y}\, \underline{x}) \vee C_S(\underline{x}'', \underline{y}'')], \\ (B \vee C)^S &\equiv \forall \underline{x}', \underline{x}'' \exists \underline{y}', \underline{y}'' [B_S(\underline{x}', \underline{y}') \vee C_S(\underline{x}'', \underline{y}'')]. \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, existem termos fechados $\underline{q}_{\underline{y}}, \underline{q}_{\underline{y}'}$ e $\underline{r}_{\underline{x}}, \underline{r}_{\underline{y}''}$ tais que

$$\begin{aligned}
\mathsf{PA}_0^\omega &\vdash \forall \underline{x}, \underline{x}'[A_S(\underline{x}, \underline{q}_{\underline{y}}\underline{l}_{AB}\underline{x}\,\underline{x}') \vee B_S(\underline{x}', \underline{q}_{\underline{y}'}\underline{l}_{AB}\underline{x}\,\underline{x}')], & (5.1)\\
\mathsf{PA}_0^\omega &\vdash \forall \underline{Y}, \underline{x}''\big[\neg A_S\big(\underline{r}_{\underline{x}}\underline{l}_{AC}\underline{Y}\,\underline{x}'', \underline{Y}(\underline{r}_{\underline{x}}\underline{l}_{AC}\underline{Y}\,\underline{x}'')\big) \vee C_S(\underline{x}'', \underline{r}_{\underline{y}''}\underline{l}_{AC}\underline{Y}\,\underline{x}'')\big]. & (5.2)
\end{aligned}$$

Seja $\underline{\tilde{q}}_{\underline{y}} :\equiv \lambda \underline{l}_{AB}, \underline{x}', \underline{x}\,.\,(\underline{q}_{\underline{y}}\underline{l}_{AB}\underline{x}\,\underline{x}')$ (o papel de $\underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}$ é pôr as variáveis $\underline{l}_{AB}, \underline{x}, \underline{x}'$ de $\underline{q}_{\underline{y}}\underline{l}_{AB}\underline{x}\,\underline{x}'$ por ordem conveniente).
Para simplificar a notação, no resto desta alínea onde aparecer

$$\underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}, \qquad \underline{q}_{\underline{y}'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}, \qquad \underline{r}_{\underline{x}}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}, \qquad \underline{r}_{\underline{y}''}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l},$$

devemos entender, respectivamente,

$$\underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}\underline{\mathcal{O}}_{A\backslash BC}\underline{l}_{AB\backslash(A\backslash BC)},\ \underline{q}_{\underline{y}'}\underline{\mathcal{O}}_{A\backslash BC}\underline{l}_{AB\backslash(A\backslash BC)},\ \underline{r}_{\underline{x}}\underline{\mathcal{O}}_{A\backslash BC}\underline{l}_{AC\backslash(A\backslash BC)},\ \underline{r}_{\underline{y}''}\underline{\mathcal{O}}_{A\backslash BC}\underline{l}_{AC\backslash(A\backslash BC)},$$

isto é, em $\underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}\underline{l}_{AB}$, $\underline{q}_{\underline{y}'}\underline{l}_{AB}$, $\underline{r}_{\underline{x}}\underline{l}_{AC}$ e $\underline{r}_{\underline{y}''}\underline{l}_{AC}$ estamos a substituir os $\underline{l}_{A\backslash BC}$ (que supomos serem as primeiras variáveis dos uplos $\underline{l}_{AB}$ e $\underline{l}_{AC}$) por $\underline{\mathcal{O}}_{A\backslash BC}$ e a não alterar as restantes variáveis desses uplos.
Vejamos que os termos

$$\begin{aligned}
\underline{t}_{\underline{y}'} &:\equiv \lambda \underline{l}_{BC}, \underline{x}', \underline{x}''\,.\,\big[\underline{q}_{\underline{y}'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}\big(\underline{r}_{\underline{x}}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}(\underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}\,\underline{x}')\underline{x}''\big)\underline{x}'\big],\\
\underline{t}_{\underline{y}''} &:\equiv \lambda \underline{l}_{BC}, \underline{x}', \underline{x}''\,.\,[\underline{r}_{\underline{y}''}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}(\underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}\,\underline{x}')\underline{x}''],
\end{aligned}$$

estão nas condições pretendidas. De (5.1) vem

$$\mathsf{PA}_0^\omega \vdash \forall \underline{x}, \underline{x}'[A_S(\underline{x}, \underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}\underline{l}_{AB}\underline{x}'\underline{x}) \vee B_S(\underline{x}', \underline{q}_{\underline{y}'}\underline{l}_{AB}\underline{x}\,\underline{x}')]. \tag{5.3}$$

Pondo $\underline{Y} = \underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}\underline{l}_{AB}\underline{x}'$ em (5.2) vem

$$\begin{aligned}
\mathsf{PA}_0^\omega \vdash \forall \underline{x}''\Big[\neg A_S\Big(&\underline{r}_{\underline{x}}\underline{l}_{AC}(\underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}\underline{l}_{AB}\underline{x}')\underline{x}'', \underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}\underline{l}_{AB}\underline{x}'\big(\underline{r}_{\underline{x}}\underline{l}_{AC}(\underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}\underline{l}_{AB}\underline{x}')\underline{x}''\big)\Big)\vee\\
&C_S\big(\underline{x}'', \underline{r}_{\underline{y}''}\underline{l}_{AC}(\underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}\underline{l}_{AB}\underline{x}')\underline{x}''\big)\Big].
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Pondo $\underline{x} = \underline{r}_{\underline{x}}\underline{l}_{AC}(\underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}\underline{l}_{AB}\underline{x}')\underline{x}''$ em (5.3) vem

$$\begin{aligned}
\mathsf{PA}_0^\omega \vdash \forall \underline{x}'\Big[A_S\Big(&\underline{r}_{\underline{x}}\underline{l}_{AC}(\underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}\underline{l}_{AB}\underline{x}')\underline{x}'', \underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}\underline{l}_{AB}\underline{x}'\big(\underline{r}_{\underline{x}}\underline{l}_{AC}(\underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}\underline{l}_{AB}\underline{x}')\underline{x}''\big)\Big)\vee\\
&B_S\Big(\underline{x}', \underline{q}_{\underline{y}'}\underline{l}_{AB}\big(\underline{r}_{\underline{x}}\underline{l}_{AC}(\underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}\underline{l}_{AB}\underline{x}')\underline{x}''\big)\underline{x}'\Big)\Big]
\end{aligned} \tag{5.5}$$

De (5.4) e (5.5) vem

$$\mathsf{PA}_0^\omega \vdash \forall \underline{x}', \underline{x}''\Big[B_S\Big(\underline{x}', \underline{q}_{\underline{y}'}\underline{l}_{AB}\big(\underline{r}_{\underline{x}}\underline{l}_{AC}(\underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}\underline{l}_{AB}\underline{x}')\underline{x}''\big)\underline{x}'\Big) \vee C_S\big(\underline{x}'', \underline{r}_{\underline{y}''}\underline{l}_{AC}(\underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}\underline{l}_{AB}\underline{x}')\underline{x}''\big)\Big],$$

donde, tomando $\underline{l}_{A\backslash BC} = \underline{\mathcal{O}}_{A\backslash BC}$, vem

$$\mathsf{PA}_0^\omega \vdash \forall \underline{x}', \underline{x}''\Big[B_S\Big(\underline{x}', \underline{q}_{\underline{y}'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}\big(\underline{r}_{\underline{x}}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}(\underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}\,\underline{x}')\underline{x}''\big)\underline{x}'\Big) \vee C_S\big(\underline{x}'', \underline{r}_{\underline{y}''}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}(\underline{\tilde{q}}_{\underline{y}}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{l}\,\underline{x}')\underline{x}''\big)\Big],$$

isto é,

$$\mathsf{PA}_0^\omega \vdash \forall \underline{x}', \underline{x}''[B_S(\underline{x}', \underline{t}_{\underline{y}'}\underline{l}_{BC}\underline{x}'\underline{x}'') \vee C_S(\underline{x}'', \underline{t}_{\underline{y}''}\underline{l}_{BC}\underline{x}'\underline{x}'')].$$

$\underline{A \vee B \ \Rightarrow\ \forall z A \vee B}$ Temos

$$\begin{aligned}(A \vee B)^S &\equiv \forall \underline{x}, \underline{x}'\exists \underline{y}, \underline{y}'[A_S(\underline{x}, \underline{y}) \vee B_S(\underline{x}', \underline{y}')],\\ [\forall z A(z) \vee B]^S &\equiv \forall z, \underline{x}, \underline{x}'\exists \underline{y}, \underline{y}'[A_S(\underline{x}, \underline{y}) \vee B_S(\underline{x}', \underline{y}')].\end{aligned}$$

Sejam $\underline{l}$ as variáveis de $FV(A \vee B)$ e $\underline{l}'$ as variáveis de $FV(\forall z A \vee B)$ (logo $\underline{l}'$ é $\underline{l}$ excepto z). Por hipótese de indução, existem termos fechados $\underline{q}_{\underline{y}}, \underline{q}_{\underline{y}'}$ tais que

$$\mathsf{PA}_0^\omega \vdash \forall \underline{x}, \underline{x}'[A_S(\underline{x}, \underline{q}_{\underline{y}}\underline{l}\,\underline{x}\,\underline{x}') \vee B_S(\underline{x}', \underline{q}_{\underline{y}'}\underline{l}\,\underline{x}\,\underline{x}')].$$

Os termos

$$\begin{aligned}\underline{t}_{\underline{y}} &:\equiv \lambda \underline{l}', z, \underline{x}, \underline{x}' \,.\, (\underline{q}_{\underline{y}}\underline{l}\,\underline{x}\,\underline{x}'),\\ \underline{t}_{\underline{y}'} &:\equiv \lambda \underline{l}', z, \underline{x}, \underline{x}' \,.\, (\underline{q}_{\underline{y}'}\underline{l}\,\underline{x}\,\underline{x}'),\end{aligned}$$

estão nas condições pretendidas.

$\underline{\Pi,\ \Sigma,\ \underline{R}\text{ e axiomas de }=_0\text{ e }S}$ Estes axiomas são fórmulas A sem quantificadores, logo $A^S \equiv A$, pelo que com o uplo vazio de termos verifica-se trivialmente o resultado.

$\underline{\mathsf{IR}}$ Temos

$$\begin{aligned}A(z)^S &\equiv \forall \underline{x}\exists \underline{y} A_S(\underline{x}, \underline{y}, z),\\ A(0)^S &\equiv \forall \underline{x}\exists \underline{y} A_S(\underline{x}, \underline{y}, 0),\\ [A(z) \to A(Sz)]^S &\equiv \forall \underline{Y}, \underline{x}'\exists \underline{x}, \underline{y}'[\neg A_S(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}, z) \vee A_S(\underline{x}', \underline{y}', Sz)].\end{aligned}$$

Sejam $\underline{l}$ as variáveis de $FV\big(A(z)\big)$ e $\underline{l}'$ as variáveis de $FV\big(A(0)\big)$ (portanto $\underline{l}'$ é $\underline{l}$ excepto z). Por hipótese de indução, existem termos fechados $\underline{q}$ e $\underline{r}_{\underline{x}}, \underline{r}_{\underline{y}'}$ tais que

$$\begin{aligned}\mathsf{PA}_0^\omega &\vdash \forall \underline{x} A_S(\underline{x}, \underline{q}\,\underline{l}'\underline{x}, 0), && (5.6)\\ \mathsf{PA}_0^\omega &\vdash \forall \underline{Y}, \underline{x}'\big[\neg A_S\big(\underline{r}_{\underline{x}}\underline{l}\,\underline{Y}\,\underline{x}', \underline{Y}(\underline{r}_{\underline{x}}\underline{l}\,\underline{Y}\,\underline{x}'), z\big) \vee A_S(\underline{x}', \underline{r}_{\underline{y}'}\underline{l}\,\underline{Y}\,\underline{x}', Sz)\big]. && (5.7)\end{aligned}$$

Vejamos que os termos

$$\underline{t} :\equiv \lambda \underline{l} \,.\, [\underline{R}z(\underline{q}\,\underline{l}')\lambda \underline{Y}, z \,.\, (\underline{r}_{\underline{y}'}\underline{l}\,\underline{Y})]$$

estão nas condições pretendidas. Vamos demonstrar $\forall \underline{x} A_S(\underline{x}, \underline{t}\,\underline{l}\,\underline{x}, z)$ por indução em z. O caso base resulta de (5.6). Vejamos o passo de indução. Suponhamos $\forall \underline{x} A_S(\underline{x}, \underline{t}\underline{l}\underline{x}, z)$. Pondo $\underline{x} = \underline{r}_{\underline{x}}\underline{l}(\underline{t}\underline{l})\underline{x}$ em $\forall \underline{x} A_S(\underline{x}, \underline{t}\underline{l}\underline{x}, z)$ e pondo $\underline{x}' = \underline{x}$ e $\underline{Y} = \underline{t}\underline{l}$ em (5.7) vem, respectivamente,

$$A_S\Big(\underline{r}_{\underline{x}}\underline{l}(\underline{t}\underline{l})\underline{x}, \underline{t}\underline{l}\big(\underline{r}_{\underline{x}}\underline{l}(\underline{t}\underline{l})\underline{x}\big), z\Big),$$

$$\neg A_S\Big(\underline{r}_{\underline{x}}\underline{l}(\underline{t}\underline{l})\underline{x}, \underline{t}\underline{l}(\underline{r}_{\underline{x}}\underline{l}\big(\underline{t}\underline{l})\underline{x}\big), z\Big) \vee A_S\big(\underline{x}, \underline{r}_{\underline{y}'}\underline{l}(\underline{t}\underline{l})\underline{x}, Sz\big).$$

Portanto temos $A_S\big(\underline{x}, \underline{r}_{\underline{y}'}\underline{l}(\underline{t}\underline{l})\underline{x}, Sz\big)$, isto é, $A_S(\underline{x}, \underline{t}\underline{l}\underline{x}, z)[Sz/z]$. Como $\underline{x}$ não são variáveis livres da hipótese de indução (a única hipótese aberta), vem $\forall \underline{x} A_S(\underline{x}, \underline{t}\,\underline{l}\,\underline{x}, z)[Sz/z]$.

<u>QF-AC</u> Vamos usar uma ideia devida a Fernando Ferreira: em vez de provarmos o resultado para QF-AC para uplos de variáveis, provamos para o axioma da escolha para $\exists$-fórmulas e uma só variável. Consideremos os axiomas

$$\begin{aligned} \mathsf{AC}_{\exists,\underline{x},y}: &\quad \forall \underline{x} \exists y A(\underline{x}, y) \to \exists Y \forall \underline{x} A(\underline{x}, Y\underline{x}), \\ \mathsf{AC}_{\exists,\underline{x},\underline{y}}: &\quad \forall \underline{x} \exists \underline{y} A(\underline{x}, \underline{y}) \to \exists \underline{Y} \forall \underline{x} A(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}), \end{aligned}$$

onde A é uma $\exists$-fórmula, isto é, é da forma $\exists \underline{z} B_{sq}$, sendo B_{sq} uma fórmula sem quantificadores e $\underline{z}$ um uplo de variáveis eventualmente vazio. É fácil verificar (por indução no número de variáveis de $\underline{y}$) que a partir de $\mathsf{AC}_{\exists,\underline{x},y}$ derivamos $\mathsf{AC}_{\exists,\underline{x},\underline{y}}$. Por sua vez, a partir de $\mathsf{AC}_{\exists,\underline{x},\underline{y}}$ derivamos QF-AC (basta notar que uma fórmula sem quantificadores é um caso particular de uma $\exists$-formula). Assim, é suficiente provar o resultado para $\mathsf{AC}_{\exists,\underline{x},y}$. (Como curiosidade, notemos que as implicações recíprocas valem.) Temos

$$\begin{gathered} [\forall \underline{x} \exists y A(\underline{x}, y) \to \exists Y \forall \underline{x} A(\underline{x}, Y\underline{x})]^S \equiv \forall Y, \underline{Z}, \underline{X'} \exists \underline{x}, Y', \underline{Z'} \\ \big[\neg\neg\neg\neg \cdots \neg B_{sq}(\underline{x}, Y\underline{x}, \underline{Z}\,\underline{x}) \vee \neg\neg\neg \cdots \neg B_{sq}\big(\underline{X'}Y'\underline{Z'}, Y'(\underline{X'}Y'\underline{Z'}), \underline{Z'}(\underline{X'}Y'\underline{Z'})\big)\big], \end{gathered}$$

onde nos dois $\neg \cdots \neg$ o número de negações é o dobro do número n de variáveis do uplo $\underline{z}$ (portanto, em $\neg\neg\neg\neg \cdots \neg$ há $2n+3$ negações e em $\neg\neg\neg \cdots \neg$ há $2n+2$ negações). Os termos

$$\begin{aligned} \underline{t}_{\underline{x}} &:\equiv \lambda \underline{l}, Y, \underline{Z}, \underline{X'} \,.\, (\underline{X'}Y\underline{Z}), \\ t_{Y'} &:\equiv \lambda \underline{l}, Y, \underline{Z}, \underline{X'} \,.\, Y, \\ \underline{t}_{\underline{Z'}} &:\equiv \lambda \underline{l}, Y, \underline{Z}, \underline{X'} \,.\, \underline{Z}, \end{aligned}$$

estão nas condições pretendidas (convém termos em conta que a fórmula

$$\neg\neg\neg \cdots \neg B_{sq}\big(\underline{X'}Y\underline{Z}, Y(\underline{X'}Y\underline{Z}), \underline{Z}(\underline{X'}Y\underline{Z})\big)$$

não tem quantificadores e portanto LEM vale em HA_0^ω para ela). $\square$

Teorema 107 (da caracterização de S)**.** *Para toda a fórmula A de PA_0^ω, temos $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash A \leftrightarrow A^S$.*

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução na complexidade das fórmulas.

<u>Fórmulas atómicas</u> Neste caso temos $A \equiv A^S$, pelo que o resultado é trivial.

$\underline{\neg A}$ Temos

$$\begin{aligned} A^S &\equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_S(\underline{x}, \underline{y}), \\ (\neg A)^S &\equiv \forall \underline{Y} \exists \underline{x} \neg A_S(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}). \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, temos $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash A \leftrightarrow A^S$. Então

$$\begin{aligned}\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash \neg A &\leftrightarrow \neg A^S \\ &\leftrightarrow \neg\forall \underline{x}\exists \underline{y} A_S(\underline{x}, \underline{y}) \\ &\leftrightarrow \neg\exists \underline{Y}\forall \underline{x} A_S(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}) \\ &\leftrightarrow (\neg A)^S.\end{aligned}$$

$\underline{A \vee B}$ Temos

$$\begin{aligned}A^S &\equiv \forall \underline{x}\exists \underline{y} A_S(\underline{x}, \underline{y}), \\ B^S &\equiv \forall \underline{x}'\exists \underline{y}' B_S(\underline{x}', \underline{y}'), \\ (A \vee B)^S &\equiv \forall \underline{x}, \underline{x}'\exists \underline{y}, \underline{y}'[A_S(\underline{x}, \underline{y}) \vee B_S(\underline{x}', \underline{y}')].\end{aligned}$$

Por hipótese de indução, temos $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash A \leftrightarrow A^S$ e $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash B \leftrightarrow B^S$. Então

$$\begin{aligned}\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash A \vee B &\leftrightarrow A^S \vee B^S \\ &\leftrightarrow (A \vee B)^S,\end{aligned}$$

onde na segunda equivalência usámos as regras de prenifixação.

$\underline{\forall z A}$ Temos

$$\begin{aligned}A^S &\equiv \forall \underline{x}\exists \underline{y} A_S(\underline{x}, \underline{y}), \\ (\forall z A)^S &\equiv \forall z, \underline{x}\exists \underline{y} A_S(\underline{x}, \underline{y}).\end{aligned}$$

Notemos que $(\forall z A)^S \equiv \forall z A^S$. Por hipótese de indução, temos $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash A \leftrightarrow A^S$, logo $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash \forall z A \leftrightarrow (\forall z A)^S$. $\square$

Observação 108. Analogamente à observação 73, podemos concluir que no teorema da correcção de S não faltam princípios.

Teorema 109 (da extracção de programas por S)**.** *Seja $A_{sq}(x, y)$ é uma fórmula sem quantificadores de PA_0^ω tal que $FV(A_{sq}) = \{x, y\}$. Se $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash \forall x\exists y A_{sq}(x, y)$, então existe um termo fechado t de HA_0^ω, que pode ser calculado a partir de uma derivação de $\forall x\exists y A_{sq}(x, y)$, tal que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall x A_{sq}(x, tx)$.*

Demonstração. Temos $[\forall x\exists y A_{sq}(x, y)]^S \equiv \forall x\exists y\neg\neg A_{sq}(x, y)$. Pelo teorema da correcção de S, existe um termo fechado t tal que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall x\neg\neg A_{sq}(x, tx)$. Como $A_{sq}(x, tx)$ não tem quantificadores, usando LDN obtemos o resultado. $\square$

Teorema 110 (da conservação por S)**.** *Seja A_{sq} é uma fórmula sem quantificadores de PA_0^ω. Se $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash \forall x\exists y A_{sq}$, então $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall x\exists y A_{sq}$.*

Demonstração. Repetindo os argumentos do teorema da extracção de programas por S, obtemos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall x A_{sq}(x, t\underline{l}x)$, onde $\underline{l}$ são as variáveis de $FV(\forall x\exists y A_{sq})$. Daqui sai facilmente o resultado. $\square$

Nota histórica 111. A tradução de Shoenfield surge pela primeira vez no livro [Shoenfield 1967], secção 8.3, de Shoenfield. O objectivo de Shoenfield foi reduzir consistência de PA (não exactamente a nossa PA_0^ω) à consistência da teoria T de Gödel. Gödel já o tinha feito em dois passos: (i) reduzindo a consistência de PA à de HA (não exactamente a nossa HA_0^ω) via uma tradução negativa e (ii) reduzindo a consistência de HA a T via a D-tradução. Shoenfield, com a sua tradução, obtém a mesma redução num único passo.

Na verdade, Shoenfield apresenta a teoria T de Gödel não como uma teoria, mas como «uma linguagem Y para discutir funcionais». Por exemplo, não lhe dá um sistema de dedução formal. Em vez disso, à medida que vai introduzindo a sintaxe, vai também explicando a interpretação a dar aos símbolos (por exemplo, «A constante 0 designa o número natural zero e a constante S designa a função sucessor.»), e terminada a exposição da sintaxe afirma:

> «Uma vez que explicámos o significado de todos os símbolos de Y, será claro o que significa dizer que uma fórmula de Y é *verdadeira* para certos valores das suas variáveis. Usamos $\vdash_Y A$ para significar que A é verdadeira para todos os valores das suas variáveis [...].»

O resultado principal de Shoenfield é o teorema da correcção de S: se $\mathsf{PA} \vdash A$ e $A^S \equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y})$, então existem termos $\underline{t}$ (não necessariamente fechados) tais que $\vdash_Y A(\underline{x}, \underline{t})$. A partir daqui a demonstração da consistência de PA é fácil: se $\mathsf{PA} \vdash 0 \neq 0$, então $\vdash_Y 0 \neq 0$, o que é falso.

Nota biográfica 112. Joseph R. Shoenfield (1927–2000) foi um matemático e lógico que deu contributos relevantes para a lógica e era reconhecido como um grande expositor dessa área (é famoso o seu [Shoenfield 1967]). A sua principal área de investigação era a teoria da recursão, mas deu também contributos importantes à teoria dos conjuntos.

Shoenfield doutorou-se pela Universidade do Michigan (EUA) em 1953 com uma tese intitulada *Models of Formal Systems*. Ensinou no Departamento de Matemática da Universidade de Duke (no estado da Carolina do Norte, EUA) desde 1952 até reformar-se em 1992. Foi presidente da Associação para a Lógica Simbólica (*Association for Symbolic Logic*, ASL) entre 1972 e 1976, tendo por meio de uma forte liderança contribuído para a sobrevivência da associação num momento em que sofria cortes de financiamento.

A matemática não era o único talento de Shoenfield. Era também um jogador feroz de xadrez e *bridge* e cozinhava excelentes refeições que servia aos seus amigos e colegas.

Em 2007 a ASL institui dois Prémios Shoenfield, a atribuir a cada três anos a um livro e a um artigo de excepcionais méritos em lógica.

5.2 Primeira tradução de Shoenfield modificada

A S-tradução de $A \wedge B$, calculada na alínea 2 da proposição 105, é bastante complicada. Seria uma simplificação bem-vinda podemos definir $(A \wedge B)^S$ de forma análoga a $(A \vee B)^S$:

$$(A \wedge B)^S :\equiv \forall \underline{x}, \underline{x}' \exists \underline{y}, \underline{y}' [A_S(\underline{x}, \underline{y}) \wedge B_S(\underline{x}', \underline{y}')].$$

Definição 113. Para cada fórmula A de PA_0^ω baseado em $\neg$, $\vee$, $\wedge$ e $\forall$, definimos as fórmulas A^{S_m} e A_{S_m}, a primeira delas chamada *primeira tradução de Shoenfield modificada* de A, por indução na complexidade das fórmulas.

1. Se A é fórmula atómica, então $A^{S_m} :\equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_{S_m}(\underline{x}, \underline{y}) :\equiv A$ onde $\underline{x}$ e $\underline{y}$ são uplos vazios.

Suponhamos que já definimos $A^{S_m} \equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_{S_m}(\underline{x}, \underline{y})$ e $B^{S_m} \equiv \forall \underline{x}' \exists \underline{y}' B_{S_m}(\underline{x}', \underline{y}')$. Então:

2. $(\neg A)^{S_m} :\equiv \forall \underline{Y} \exists \underline{x} (\neg A)_{S_m}(\underline{Y}, \underline{x}) :\equiv \forall \underline{Y} \exists \underline{x} \neg A_{S_m}(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x})$;

3. $(A \vee B)^{S_m} :\equiv \forall \underline{x}, \underline{x}' \exists \underline{y}, \underline{y}' (A \vee B)_{S_m}(\underline{x}, \underline{x}', \underline{y}, \underline{y}') :\equiv \forall \underline{x}, \underline{x}' \exists \underline{y}, \underline{y}' [A_{S_m}(\underline{x}, \underline{y}) \vee B_{S_m}(\underline{x}', \underline{y}')]$;

4. $(A \wedge B)^{S_m} :\equiv \forall \underline{x}, \underline{x}' \exists \underline{y}, \underline{y}' (A \wedge B)_{S_m}(\underline{x}, \underline{x}', \underline{y}, \underline{y}') :\equiv \forall \underline{x}, \underline{x}' \exists \underline{y}, \underline{y}' [A_{S_m}(\underline{x}, \underline{y}) \wedge B_{S_m}(\underline{x}', \underline{y}')]$;

5. $(\forall z A)^{S_m} :\equiv \forall z, \underline{x} \exists \underline{y} (\forall z A)_{S_m}(z, \underline{x}, \underline{y}) :\equiv \forall z, \underline{x} \exists \underline{y} A_{S_m}(\underline{x}, \underline{y})$.

Numa tradução $A^{S_m} \equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_{S_m}(\underline{x}, \underline{y})$, supomos que as variáveis $\underline{x}, \underline{y}$ são distintas e não ocorrem livres em A.
Se estivermos a encarar A^{S_m} e A_{S_m} como fórmulas baseadas em $\neg$, $\vee$, $\wedge$ e $\forall$, então o símbolo $\neg$ na alínea 2 é um símbolo primitivo, e o símbolo $\exists$ que surge em todas as alíneas é um símbolo definido.
Se estivermos a encarar A^{S_m} e A_{S_m} como baseadas em $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$ e $\exists$ (por exemplo, como fórmulas de HA_0^ω), então o símbolo $\neg$ que surge é um símbolo definido e o símbolo $\exists$ é um símbolo primitivo.

Observação 114. Demonstramos facilmente por indução na complexidade das fórmulas que A_{S_m} não tem quantificadores e que se A_{sq} é uma fórmula sem quantificadores de PA_0^ω, então $(A_{sq})^{S_m} \equiv A_{sq}$.

Teorema 115 (da correcção de S_m)**.** *Sejam A uma fórmula arbitrária de PA_0^ω, $\underline{l}$ todas as variáveis livres de A e $A^{S_m} \equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_{S_m}(\underline{x}, \underline{y})$. Se $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash A$, então existe um uplo de termos fechados $\underline{t}$ de PA_0^ω, que pode ser calculado a partir de uma derivação de A, tal que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall \underline{x} A_{S_m}(\underline{x}, \underline{t}\,\underline{l}\,\underline{x})$.*

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução no comprimento das derivações, construindo explicitamente os termos $\underline{t}$. Todos os casos são análogos aos do teorema da correcção de S, excepto os seguintes.

$\underline{A \wedge B \to A}$ Temos

$$\begin{gathered}(A \wedge B \to A)^{S_m} \equiv \forall \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''} \exists \underline{x}, \underline{x'}, \underline{y''} \\ \left[\neg\big(A_{S_m}(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}\,\underline{x'}) \wedge B_{S_m}(\underline{x'}, \underline{Y'}\,\underline{x}\,\underline{x'})\big) \vee A_{S_m}(\underline{x''}, \underline{y''})\right].\end{gathered}$$

Os termos

$$\begin{aligned} \underline{t_{\underline{x}}} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''} \,.\, \underline{x''}, \\ \underline{t_{\underline{x'}}} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''} \,.\, \underline{\mathcal{O}}, \\ \underline{t_{\underline{y''}}} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''} \,.\, (\underline{Y}\,\underline{x''}\,\underline{\mathcal{O}}), \end{aligned}$$

(onde o uplo $\underline{\mathcal{O}}$ tem tipo apropriado) estão nas condições pretendidas (convém termos em conta que a fórmula $A_{S_m}(\underline{x''}, \underline{Y x'' \mathcal{O}})$ não tem quantificadores, pelo que LEM vale em HA_0^ω para ela).

$\underline{A \wedge B \to A}$ Este caso é análogo ao caso anterior.

$\underline{A \to (B \to A \wedge B)}$ Temos

$$\begin{gathered}[A \to (B \to A \wedge B)]^{S_m} \equiv \forall \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''}, \underline{x'''} \exists \underline{x}, \underline{x'}, \underline{y''}, \underline{y'''} \\ \left[\neg A_{S_m}(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}) \vee \Big(\neg B_{S_m}(\underline{x'}, \underline{Y'}\,\underline{x'}) \vee \big(A_{S_m}(\underline{x''}, \underline{y''}) \wedge B_{S_m}(\underline{x'''}, \underline{y'''})\big)\Big)\right].\end{gathered}$$

Os termos

$$\begin{aligned} t_{\underline{x}} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''}, \underline{x'''} \,.\, \underline{x''}, \\ t_{\underline{x'}} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''}, \underline{x'''} \,.\, \underline{x'''}, \\ t_{\underline{y''}} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''}, \underline{x'''} \,.\, (\underline{Y}\,\underline{x''}), \\ t_{\underline{y'''}} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''}, \underline{x'''} \,.\, (\underline{Y'}\,\underline{x'''}), \end{aligned}$$

estão nas condições pretendidas (convém ter em conta que as fórmulas $A_{S_m}(\underline{x''}, \underline{Y x''})$ e $B_{S_m}(\underline{x'''}, \underline{Y' x'''})$ não têm quantificadores, pelo que LEM vale em HA_0^ω para elas). $\square$

Teorema 116 (da caracterização de S_m)**.** *Para toda a fórmula A de PA_0^ω, temos* $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash A \leftrightarrow A^{S_m}$.

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução na complexidade das fórmulas. Basta estender a demonstração do teorema da caracterização de S ao caso $A \wedge B$, o que fazemos analogamente ao caso $A \vee B$. $\square$

Observação 117. Analogamente à observação 73, podemos concluir que no teorema da correcção de S_m não faltam princípios.

5.3 Segunda tradução de Shoenfield modificada

No próximo capítulo iremos ver que a S-tradução factoriza-se por meio da D--tradução e da Kr-tradução, isto é, $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash (A^{Kr})^D \leftrightarrow A^S$, onde A é uma fórmula de uma linguagem baseada em $\neg$, $\vee$ e $\forall$. Também nesse capítulo vamos tentar estender esse resultado a uma linguagem baseada em $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\forall$. Para tal extensão valer, em particular devemos ter $(A \wedge B)^{S_{mm}} \leftrightarrow [(A \wedge B)^{Kr_m}]^D$, onde S_{mm} é uma extensão de S à linguagem baseada em $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\forall$. Mas o membro direito desta equivalência vai conter a D-tradução de uma disjunção (porque Kr_m transforma $\wedge$ em $\vee$). Assim, parece que $(A \wedge B)^{S_{mm}}$ tem de ter algo a ver com a D-tradução de uma disjunção. Isto motiva definirmos

$$(A \wedge B)^{S_{mm}} :\equiv \forall z^0, \underline{x}, \underline{x}' \exists \underline{y}, \underline{y}' \big[\big(z =_0 0 \to A_{S_{mm}}(\underline{x}, \underline{y})\big) \wedge \big(z \neq_0 0 \to B_{S_{mm}}(\underline{x}', \underline{y}')\big)\big],$$

onde $A^{S_{mm}} \equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_{S_{mm}}(\underline{x}, \underline{y})$ e $B^{S_{mm}} \equiv \forall \underline{x}' \exists \underline{y}' B_{S_{mm}}(\underline{x}', \underline{y}')$.

Definição 118. Para cada fórmula A de PA_0^ω baseado em $\neg$, $\vee$, $\wedge$ e $\forall$, definimos as fórmulas $A^{S_{mm}}$ e $A_{S_{mm}}$, a primeira delas chamada *segunda tradução de Shoenfield modificada*, por indução na complexidade das fórmulas.

1. Se A é fórmula atómica, então $A^{S_{mm}} :\equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_{S_{mm}}(\underline{x}, \underline{y}) :\equiv A$ onde $\underline{x}$ e $\underline{y}$ são uplos vazios.

Suponhamos que já definimos $A^{S_{mm}} \equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_{S_{mm}}(\underline{x}, \underline{y})$ e $B^{S_{mm}} \equiv \forall \underline{x}' \exists \underline{y}' B_{S_{mm}}(\underline{x}', \underline{y}')$. Então:

2. $(\neg A)^{S_{mm}} :\equiv \forall \underline{Y} \exists \underline{x} (\neg A)_{S_{mm}}(\underline{Y}, \underline{x}) :\equiv \forall \underline{Y} \exists \underline{x} \neg A_{S_{mm}}(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x})$;

3. $(A \vee B)^{S_{mm}} :\equiv \forall \underline{x}, \underline{x}' \exists \underline{y}, \underline{y}' (A \vee B)_{S_{mm}}(\underline{x}, \underline{x}', \underline{y}, \underline{y}') :\equiv$
   $\forall \underline{x}, \underline{x}' \exists \underline{y}, \underline{y}' [A_{S_{mm}}(\underline{x}, \underline{y}) \vee B_{S_{mm}}(\underline{x}', \underline{y}')]$;

4. $(A \wedge B)^{S_{mm}} :\equiv \forall z^0, \underline{x}, \underline{x}' \exists \underline{y}, \underline{y}' (A \wedge B)_{S_{mm}}(z, \underline{x}, \underline{x}', \underline{y}, \underline{y}') :\equiv$
   $\forall z^0, \underline{x}, \underline{x}' \exists \underline{y}, \underline{y}' \big[\big(z =_0 0 \to A_{S_{mm}}(\underline{x}, \underline{y})\big) \wedge \big(z \neq_0 0 \to B_{S_{mm}}(\underline{x}', \underline{y}')\big)\big]$;

5. $(\forall z A)^{S_{mm}} :\equiv \forall z, \underline{x} \exists \underline{y} (\forall z A)_{S_{mm}}(z, \underline{x}, \underline{y}) :\equiv \forall z, \underline{x} \exists \underline{y} A_{S_{mm}}(\underline{x}, \underline{y})$.

Numa tradução $A^{S_{mm}} \equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_{S_{mm}}(\underline{x}, \underline{y})$, supomos que as variáveis $\underline{x}, \underline{y}$ são distintas e não ocorrem livres em A.
Se estivermos a encarar $A^{S_{mm}}$ e $A_{S_{mm}}$ como fórmulas baseadas em $\neg$, $\vee$, $\wedge$ e $\forall$, então o símbolo $\neg$ na alínea 2 é um símbolo primitivo e os símbolos $\to$ que surge na alínea 4 e $\exists$ que surge em todas as alíneas são um símbolos definidos.
Se estivermos a encarar $A^{S_{mm}}$ e $A_{S_{mm}}$ como baseadas em $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$ e $\exists$ (por exemplo, como fórmulas de HA_0^ω), então o símbolo $\neg$ que surge é um símbolo definido e os símbolos $\exists$ e $\to$ são símbolos primitivos.

Observação 119. Demonstramos facilmente por indução na complexidade das fórmulas que $A_{S_{mm}}$ não tem quantificadores e que se A_{sq} é uma fórmula sem quantificadores, e sem conjunções, de PA_0^ω, então $(A_{sq})^{S_m} \equiv A_{sq}$.

Teorema 120 (da correcção de S_{mm})**.** *Sejam A uma fórmula arbitrária de PA_0^ω, $\underline{l}$ todas as variáveis livres de A e $A^{S_{mm}} \equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_{S_{mm}}(\underline{x}, \underline{y})$. Se $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash A$, então existe um uplo de termos fechados $\underline{t}$ de PA_0^ω, que pode ser calculado a partir de uma derivação de A, tal que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \forall \underline{x} A_{S_{mm}}(\underline{x}, \underline{t}\,\underline{l}\,\underline{x})$.*

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução no comprimento das derivações, construindo explicitamente os termos $\underline{t}$. Todos os casos são análogos aos do teorema da correcção de S, excepto os seguintes.

$\underline{\Pi, \Sigma \text{ e } \underline{R}}$ Estes axiomas são equivalências $A \leftrightarrow B$ onde A e B são fórmulas atómicas. Temos

$$(A \leftrightarrow B)^{S_{mm}} \equiv \forall z^0 \big[\big(z =_0 0 \to (\neg A \vee B) \big) \wedge \big(z \neq_0 0 \to (\neg B \vee A) \big) \big].$$

Como A e B são fórmulas sem quantificadores, então LEM vale para elas, logo (usando $A \leftrightarrow B$) $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg A \vee B$ e $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg B \vee A$, donde facilmente provamos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash [(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)]^{S_{mm}}$.

$\underline{x =_0 y \wedge A(x) \to A(y)}$ Temos

$$[x =_0 y \wedge A(x) \to A(y)]^{S_{mm}} \equiv$$
$$\exists z^0 \Big[\neg \Big((z =_0 0 \to x =_0 y) \wedge \big(z \neq_0 0 \to A(x) \big) \Big) \vee A(y) \Big].$$

Como $A(x)$ é uma fórmula sem quantificadores, então pelo lema 54 existe um termo $t_{A(x)}$ tal que $FV(t_{A(x)}) = FV\big(A(x)\big)$ e $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash t_{A(x)} =_0 0 \leftrightarrow A(x)$. Vejamos que o termo $t :\equiv \lambda \underline{l}\,.\, t_{A(x)}$, onde $\underline{l}$ são as variáveis livres de $FV\big(x =_0 y \wedge A(x) \to A(y)\big)$, está nas condições pretendidas, isto é, é fechado (óbvio) e verifica

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg \big[(t\underline{l} =_0 0 \to x =_0 y) \wedge \big(t\underline{l} \neq_0 0 \to A(x) \big) \big] \vee A(y).$$

o que com este termo equivale a

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \neg \underbrace{\big[\big(A(x) \to x =_0 y \big) \wedge \big(\neg A(x) \to A(x) \big) \big]}_{\equiv : B} \vee A(y). \tag{5.8}$$

Como $A(x)$ e $A(y)$ são fórmulas sem quantificadores, então LEM vale para $A(x)$ e $A(y)$. Se tivermos $A(y)$, então temos (5.8). Suponhamos agora que temos $\neg A(y)$ e provemos $\neg B$. Suponhamos B. Se tivermos $A(x)$, então por B vem $x =_0 y$, logo temos $A(y)$ e portanto $\perp$. Se tivermos $\neg A(x)$, então por B temos $A(x)$ e portanto $\perp$.

$\underline{x =_0 x \text{ e axiomas de } S}$ Estes axiomas são fórmulas que coincidem com as suas S_{mm}--traduções, pelo que o uplo vazio de termos verifica trivialmente o resultado.

$\underline{A \wedge B \to A}$ Temos

$$(A \wedge B \to A)^{S_{mm}} \equiv \forall \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''} \exists z^0, \underline{x}, \underline{x'}, \underline{y''}$$

$$\Big[\neg\Big(\big(z =_0 0 \to A_{S_{mm}}(\underline{x}, \underline{Y}z\underline{x}\underline{x'})\big) \wedge \big(z \neq_0 0 \to B_{S_{mm}}(\underline{x'}, \underline{Y'}z\underline{x}\underline{x'})\big)\Big) \vee A_{S_{mm}}(\underline{x''}, \underline{y''})\Big].$$

Os termos

$$\begin{aligned} t_z &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''} \,.\, 0^0, \\ \underline{t_{\underline{x}}} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''} \,.\, \underline{x''}, \\ \underline{t_{\underline{x'}}} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''} \,.\, \underline{\mathcal{O}}, \\ \underline{t_{\underline{y''}}} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''} \,.\, (\underline{Y} 0^0 \underline{x''}\, \underline{\mathcal{O}}), \end{aligned}$$

(onde o uplo $\underline{\mathcal{O}}$ tem tipo apropriado) estão nas condições pretendidas (convém ter em conta que a fórmula $A_{S_{mm}}(\underline{x''}, \underline{Y} 0^0 \underline{x''}\,\underline{\mathcal{O}})$ não tem quantificadores, pelo que LEM vale em HA_0^ω para ela).

$\underline{A \wedge B \to A}$ Este caso é análogo ao caso anterior.

$\underline{A \to (B \to A \wedge B)}$ Temos

$$[A \to (B \to A \wedge B)]^{S_{mm}} \equiv \forall \underline{Y}, \underline{Y'}, z^0, \underline{x''}, \underline{x'''} \exists \underline{x}, \underline{x'}, \underline{y''}, \underline{y'''} \Big[\neg A_{S_{mm}}(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}) \vee$$

$$\Big(\neg B_{S_{mm}}(\underline{x'}, \underline{Y'}\,\underline{x'}) \vee \Big(\big(z =_0 0 \to A_{S_{mm}}(\underline{x''}, \underline{y''})\big) \wedge \big(z \neq_0 0 \to B_{S_{mm}}(\underline{x'''}, \underline{y'''})\big)\Big)\Big)\Big].$$

Os termos

$$\begin{aligned} t_{\underline{x}} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{Y}, \underline{Y'}, z^0, \underline{x''}, \underline{x'''} \,.\, \underline{x''}, \\ t_{\underline{x'}} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{Y}, \underline{Y'}, z^0, \underline{x''}, \underline{x'''} \,.\, \underline{x'''}, \\ t_{\underline{y''}} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{Y}, \underline{Y'}, z^0, \underline{x''}, \underline{x'''} \,.\, (\underline{Y}\,\underline{x''}), \\ t_{\underline{y'''}} &:\equiv \lambda \underline{l}, \underline{Y}, \underline{Y'}, z^0, \underline{x''}, \underline{x'''} \,.\, (\underline{Y'}\,\underline{x'''}), \end{aligned}$$

estão nas condições pretendidas (convém ter em conta que as fórmulas $A_{S_{mm}}(\underline{x''}, \underline{Yx''})$ e $B_{S_{mm}}(\underline{x'''}, \underline{Y'x'''})$ não têm quantificadores, pelo que LEM vale em HA_0^ω para elas). $\square$

Teorema 121 (da caracterização de S_{mm})**.** *Para toda a fórmula A de PA_0^ω, temos* $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash A \leftrightarrow A^{S_{mm}}$.

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução na complexidade das fórmulas. Basta estender a demonstração do teorema da caracterização de S ao caso $A \wedge B$. Digamos que $A^{S_{mm}} \equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_{S_{mm}}(\underline{x}, \underline{y})$ e $B^{S_{mm}} \equiv \forall \underline{x'} \exists \underline{y'} B_{S_{mm}}(\underline{x'}, \underline{y'})$. Temos

$$\begin{aligned} \mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash (A \wedge B)^{S_{mm}} &\leftrightarrow \forall z^0 \big[\big(z =_0 0 \to \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_{S_{mm}}(\underline{x}, \underline{y})\big) \wedge \\ &\qquad \big(z \neq_0 0 \to \forall \underline{x'} \exists \underline{y'} A_{S_{mm}}(\underline{x'}, \underline{y'})\big)\big] \\ &\equiv \forall z^0 [(z =_0 0 \to A^{S_{mm}}) \wedge (z \neq_0 0 \to B^{S_{mm}})] \\ &\leftrightarrow \forall z^0 [(z =_0 0 \to A) \wedge (z \neq_0 0 \to B)] \\ &\leftrightarrow A \wedge B, \end{aligned}$$

onde na primeira equivalência usamos as regras de prenifixação e na segunda equivalência usamos as hipóteses de indução $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash A \leftrightarrow A^{S_{mm}}$ e $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash B \leftrightarrow B^{S_{mm}}$. □

Observação 122. Analogamente à observação 73, podemos concluir que no teorema da correcção de S_{mm} não faltam princípios.

5.4 Equivalência entre as traduções de Shoenfield

Dos teoremas da caracterização de S, S_m e S_{mm} resulta trivialmente

$$\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash A^S \leftrightarrow A^{S_m} \leftrightarrow A^{S_{mm}}.$$

Vamos ver que usando a Ku-tradução para passar a uma teoria intuicionista, conseguimos um resultado melhor.

Proposição 123. *Para toda a fórmula A de PA_0^ω baseado em $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\forall$, temos*

$$\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} + \mathsf{M} \vdash A^S \leftrightarrow A^{S_m} \leftrightarrow A^{S_{mm}},$$

onde ao calcularmos A^S encaramos $\wedge$ como símbolo definido.

Demonstração. Sejam s e s' quaisquer duas das traduções S, S_m e S_{mm}. Pelos teoremas da caracterização de s e s', temos $\mathsf{PA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash A^s \leftrightarrow A^{s'}$. Digamos que $A^s \equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_s(\underline{x}, \underline{y})$ e $A^{s'} \equiv \forall \underline{x'} \exists \underline{y'} A_{s'}(\underline{x'}, \underline{y'})$, onde $\underline{x} = x_1, \ldots, x_m$ e $\underline{x'} = x'_1, \ldots, x'_n$ Daqui, pelo teorema da correcção de Ku, vem

$$\begin{gathered}\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} + \mathsf{M} \vdash (A^s \leftrightarrow A^{s'})^{Ku} \equiv \\ \neg\neg[\underbrace{\forall x_1 \neg\neg \cdots \forall x_m \neg\neg \exists \underline{y} A_s(\underline{x}, \underline{y})}_{\equiv (A^s)_{Ku}} \leftrightarrow \underbrace{\forall x'_1 \neg\neg \cdots \forall x'_n \neg\neg \exists \underline{y'} A_{s'}(\underline{x'}, \underline{y'})}_{\equiv (A^{s'})_{Ku}}].\end{gathered} \tag{5.9}$$

Como intuicionisticamente temos $\neg\neg(B \wedge C) \leftrightarrow \neg\neg B \wedge \neg\neg C$ e $\neg\neg(B \to C) \leftrightarrow (\neg\neg B \to \neg\neg C)$, então também temos $\neg\neg(B \leftrightarrow C) \leftrightarrow (\neg\neg B \leftrightarrow \neg\neg C)$. Portanto, de (5.9) vem

$$\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} + \mathsf{M} \vdash \underbrace{\neg\neg(A^s)_{Ku}}_{\equiv (A^s)^{Ku}} \leftrightarrow \underbrace{\neg\neg(A^{s'})_{Ku}}_{\equiv (A^{s'})^{Ku}}. \tag{5.10}$$

Vejamos $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{M} \vdash (A^s)^{Ku} \leftrightarrow A^s$. Para derivarmos a implicação da esquerda para a direita usamos $\neg\neg\forall z B \to \forall z \neg\neg B$ (que vale intuicionisticamente) para passarmos todas as duplas negações de $(A^s)^{Ku} \equiv \neg\neg\forall x_1 \neg\neg \cdots \forall x_m \neg\neg \exists \underline{y} A_s(\underline{x}, \underline{y})$ para antes de $\exists \underline{y}$, obtendo $\forall \underline{x} \neg\neg \cdots \neg\neg \exists \underline{y} A_s(\underline{x}, \underline{y})$, e depois usamos M para eliminar as duplas negações, obtendo $\forall \underline{x} \exists \underline{y} A_s(\underline{x}, \underline{y}) \equiv A^s$.
Para derivarmos a implicação da direita para esquerda usamos $B \to \neg\neg B$ (que vale intuicionisticamente) para introduzir duplas negações em $(A^s)^{Ku} \equiv \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_s(\underline{x}, \underline{y})$,

obtendo $\neg\neg\forall x_1 \neg\neg \cdots \forall x_m \neg\neg \exists \underline{y} A_s(\underline{x}, \underline{y}) \equiv (A^s)^{Ku}$.
Analogamente provamos $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{M} \vdash (A^{s'})^{Ku} \leftrightarrow A^{s'}$.

A partir de $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{M} \vdash (A^s)^{Ku} \leftrightarrow A^s$, $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{M} \vdash (A^{s'})^{Ku} \leftrightarrow A^{s'}$ e (5.10) concluímos $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} + \mathsf{M} \vdash A^s \leftrightarrow A^{s'}$. $\square$

Capítulo 6

Factorização da tradução de Shoenfield

6.1 Factorização da tradução de Shoenfield

A interpretação funcional de Gödel D interpreta HA_0^ω em HA_0^ω. Quando composta com uma tradução negativa N, que interprete PA_0^ω em HA_0^ω, passa a interpretar PA_0^ω em HA_0^ω. Também a tradução de Shoenfield S interpreta PA_0^ω em HA_0^ω, mas directamente, isto é, sem a ajuda de uma tradução negativa.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{PA}_0^\omega \arrow[r, "N"] \arrow[rr, bend right, "S"'] & \mathsf{HA}_0^\omega \arrow[r, "D"] & \mathsf{HA}_0^\omega \end{tikzcd}$$

Estes factos levantam naturalmente uma questão: teremos $(A^N)^D \leftrightarrow A^S$ para alguma tradução negativa N? Iremos de seguida dar uma resposta afirmativa com $N = Kr$.

Teorema 124 (factorização de S)**.** *Para toda a fórmula A de PA_0^ω baseado em $\neg$, $\vee$ e $\forall$, temos $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash (A^{Kr})^D \leftrightarrow A^S$, onde encaramos A^{Kr} e A_{Kr} como fórmulas de uma linguagem baseada em $\bot$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$ e $\exists$.*

Demonstração.

1. Começamos por demonstrar $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (A_{Kr})_D(\underline{x}, \underline{y}) \leftrightarrow \neg A_S(\underline{x}, \underline{y})$ por indução na complexidade das fórmulas.

<u>Fórmulas atómicas</u> Neste caso temos $(A_{Kr})_D \equiv \neg A \equiv \neg A_S$, pelo que o resultado é óbvio.

$\underline{\neg A}$ Por hipótese de indução, temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (A_{Kr})_D(\underline{x}, \underline{y}) \leftrightarrow \neg A_S(\underline{x}, \underline{y})$, logo

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{HA}_0^\omega \vdash [(\neg A)_{Kr}]_D(\underline{Y}, \underline{x}) & \equiv & (\neg A_{Kr})_D(\underline{Y}, \underline{x}) \\ & \equiv & \neg(A_{Kr})_D(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}) \\ & \leftrightarrow & \neg\neg A_S(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}) \\ & \equiv & \neg(\neg A)_S(\underline{Y}, \underline{x}). \end{array}$$

$\underline{A \vee B}$ Por hipótese de indução, temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (A_{Kr})_D(\underline{x}, \underline{y}) \leftrightarrow \neg A_S(\underline{x}, \underline{y})$ e $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (B_{Kr})_D(\underline{x'}, \underline{y'}) \leftrightarrow \neg B_S(\underline{x'}, \underline{y'})$, logo

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{HA}_0^\omega \vdash [(A \vee B)_{Kr}]_D(\underline{x}, \underline{x'}, \underline{y}, \underline{y'}) & \equiv & (A_{Kr} \wedge B_{Kr})_D(\underline{x}, \underline{x'}, \underline{y}, \underline{y'}) \\ & \equiv & (A_{Kr})_D(\underline{x}, \underline{y}) \wedge (B_{Kr})_D(\underline{x'}, \underline{y'}) \\ & \leftrightarrow & \neg A_S(\underline{x}, \underline{y}) \wedge \neg B_S(\underline{x'}, \underline{y'}) \\ & \leftrightarrow & \neg[A_S(\underline{x}, \underline{y}) \vee B_S(\underline{x'}, \underline{y'})] \\ & \equiv & \neg(A_S \vee B_S)_S(\underline{x}, \underline{x'}, \underline{y}, \underline{y'}). \end{array}$$

$\underline{\forall z A}$ Por hipótese de indução, temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (A_{Kr})_D(\underline{x}, \underline{y}) \leftrightarrow \neg A_S(\underline{x}, \underline{y})$, logo

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{HA}_0^\omega \vdash [(\forall z A)_{Kr}]_D(z, \underline{x}, \underline{y}) & \equiv & (\exists z A_{Kr})_D(z, \underline{x}, \underline{y}) \\ & \equiv & (A_{Kr})_D(\underline{x}, \underline{y}) \\ & \leftrightarrow & \neg A_S(\underline{x}, \underline{y}) \\ & \leftrightarrow & \neg(\forall z A)_S(z, \underline{x}, \underline{y}). \end{array}$$

2. Da alínea 1 sai $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash (A^{Kr})_D(\underline{Y}, \underline{x}) \leftrightarrow A_S(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x})$ da seguinte forma: atendendo a que $A_S(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x})$ não tem quantificadores (logo vale LDN para $A_S(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x})$ em HA_0^ω) vem

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{HA}_0^\omega \vdash (A^{Kr})_D(\underline{Y}, \underline{x}) & \equiv & (\neg A_{Kr})_D(\underline{Y}, \underline{x}) \\ & \equiv & \neg(A_{Kr})_D(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}) \\ & \leftrightarrow & \neg\neg A_S(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}) \\ & \leftrightarrow & A_S(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}). \end{array}$$

3. Usando a alínea 2, temos

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash (A^{Kr})^D & \equiv & \exists \underline{Y} \forall \underline{x} (A^{Kr})_D(\underline{Y}, \underline{x}) \\ & \leftrightarrow & \exists \underline{Y} \forall \underline{x} A_S(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}) \\ & \leftrightarrow & \forall \underline{x} \exists \underline{y} A_S(\underline{x}, \underline{y}) \\ & \equiv & A^S. \quad \Box \end{array}$$

Nota histórica 125. A primeira referência (sem detalhes) à factorização da tradução de Shoenfield aparece em 2002 no artigo [Hyland 2002] de Martin Hyland. Pelo menos em 2006 o mesmo resultado já tinha sido redescoberto por Jeremy Avigad em [Avigad 2006] (com detalhes) e por Ulrich Kohlenbach e Thomas Streicher em [Kohlenbach e Streicher 2007] (igualmente com detalhes).

6.2 Factorização da segunda tradução de Shoenfield modificada

Vamos agora demonstrar para a S_{mm}-tradução um teorema de factorização análogo ao da S-tradução. Desta vez a tradução negativa que ocorre na factorização não é a Kr-tradução mas a Kr_m-tradução.

Teorema 126 (factorização de S_{mm}). *Para toda a fórmula A de PA_0^ω baseado em $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\forall$, temos $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} \vdash (A^{Kr_m})^D \leftrightarrow A^{S_{mm}}$, onde encaramos A^{Kr_m} e A_{Kr_m} como fórmulas de uma linguagem baseada em $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$ e $\exists$.*

Demonstração. Basta estendermos a alínea 1 da demonstração da proposição 124 ao caso $A \wedge B$. Por hipótese de indução, temos

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{HA}_0^\omega & \vdash & (A_{Kr_m})_D(\underline{x}, \underline{y}) \leftrightarrow \neg A_{S_{mm}}(\underline{x}, \underline{y}), \\ \mathsf{HA}_0^\omega & \vdash & (B_{Kr_m})_D(\underline{x'}, \underline{y'}) \leftrightarrow \neg B_{S_{mm}}(\underline{x'}, \underline{y'}), \end{array}$$

logo em HA_0^ω derivamos

$$\begin{array}{rc} [(A \wedge B)_{Kr_m}]_D(z, \underline{x}, \underline{x'}, \underline{y}, \underline{y'}) & \equiv \\ (A_{Kr_m} \vee B_{Kr_m})_D(z, \underline{x}, \underline{x'}, \underline{y}, \underline{y'}) & \equiv \\ [z =_0 0 \to (A_{Kr_m})_D(\underline{x}, \underline{y})] \wedge [z \neq_0 0 \to (B_{Kr_m})_D(\underline{x'}, \underline{y'})] & \leftrightarrow \\ [z =_0 0 \to \neg A_{S_{mm}}(\underline{x}, \underline{y})] \wedge [z \neq_0 0 \to \neg B_{S_{mm}}(\underline{x'}, \underline{y'})] & \leftrightarrow \\ \neg\big[\big(z =_0 0 \wedge A_{S_{mm}}(\underline{x}, \underline{y})\big) \vee \big(z \neq_0 0 \wedge B_{S_{mm}}(\underline{x'}, \underline{y'})\big)\big] & \leftrightarrow \\ \neg\big[\big(z =_0 0 \to A_{S_{mm}}(\underline{x}, \underline{y})\big) \wedge \big(z \neq_0 0 \to B_{S_{mm}}(\underline{x'}, \underline{y'})\big)\big] & \equiv \\ \neg(A \wedge B)_{S_{mm}}(z, \underline{x}, \underline{x'}, \underline{y}, \underline{y''}), & \end{array}$$

onde nas equivalências podemos usar lógica clássica pelo teorema da conservação por Ku e porque as fórmulas envolvidas não têm quantificadores. $\square$

6.3 Factorização da primeira tradução de Shoenfield modificada

Parece-nos difícil demonstrar directamente (como feito para as S e S_{mm}) que S_m factoriza-se. Isto acontece porque a demonstração factorização de S e S_{mm} usa de forma fundamental uma relação sintáctica entre $(A_{Kr})_D(\underline{x}, \underline{y})$ e $A_S(\underline{x}, \underline{y})$ e entre $(A_{Kr_m})_D(\underline{x'}, \underline{y'})$ e $A_{S_{mm}}(\underline{x'}, \underline{y'})$: as variáveis $\underline{x}, \underline{y}$ do primeiro par de fórmulas são as mesmas e as variáveis $\underline{x'}, \underline{y'}$ do segundo par de fórmulas são as mesmas. Já $A_{S_m}(\underline{x''}, \underline{y''})$ não partilha esta relação com $(A_{Kr})_D(\underline{x}, \underline{y})$ nem com $(A_{Kr_m})_D(\underline{x'}, \underline{y'})$.

1. No primeiro caso isso acontece porque a S_m-tradução da conjunção não sobe os tipos das variáveis (isto é, os tipos das variáveis $\underline{u}, \underline{v}$ de $B_{S_m}(\underline{u}, \underline{v})$ e $\underline{u'}, \underline{v'}$ de

$C_{S_m}(\underline{u'}, \underline{v'})$ são os mesmos das variáveis $\underline{u}, \underline{u'}, \underline{v}, \underline{v'}$ de $(B \wedge C)_{S_m}(\underline{u}, \underline{u'}, \underline{v}, \underline{v'}))$ enquanto a $Kr\, D$-tradução sobe os tipos (para calcularmos a Kr-tradução de $B \wedge C$ temos de interpretar esta conjunção como $\neg(\neg B \vee \neg C)$, pelo que ao calcularmos $[(A \wedge B)_{Kr}]_D$ a D-tradução faz subir os tipos devido às negações em $\neg(\neg B \vee \neg C)$).

2. No segundo caso isso acontece porque a S_m-tradução da conjunção não introduz novas variáveis, enquanto a $Kr_m\, D$-tradução introduz (Kr_m transforma a conjunção numa disjunção e D introduz uma nova variável devido à disjunção).

Por isso vamos seguir outro caminho: mostramos que a factorização de S_m reduz-se à factorização de S e também à de S_{mm}. No entanto, essa redução vai exigir M.

Teorema 127 (factorização de S_m)**.** *Para toda a fórmula A de PA_0^ω baseado em $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\forall$, temos $\mathsf{HA}_0^\omega + \mathsf{QF\text{-}AC} + \mathsf{M} \vdash (A^{Kr})^D \leftrightarrow A^{S_m} \leftrightarrow (A^{Kr_m})^D$, onde ao calcularmos A^{Kr} encaramos $\wedge$ como símbolo definido e encaramos A^{Kr}, A_{Kr}, A^{Kr_m} e A_{Kr_m} como fórmulas de uma linguagem baseada em $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$ e $\exists$.*

Demonstração. Resulta dos teoremas da factorização para S e S_{mm} e da proposição 123. $\square$

Parte II

Interpretações funcionais limitadas

Capítulo 7

Aritméticas de Heyting e de Peano com majoração intensional

7.1 Majoração

Procuramos definir um símbolo $\leq_0$ que represente dentro de HA_0^ω a relação de ordem usual $\leq_\mathbb{N}$ entre números naturais. Temos

$$m \leq_\mathbb{N} n \;\Leftrightarrow\; m \dot{-} n =_\mathbb{N} 0 \;\Leftrightarrow\; \mathsf{HA}_0^\omega \vdash \overline{m} \dot{-} \overline{n} =_0 0,$$

o que sugere a seguinte definição.

Definição 128. Definimos $x \leq_0 y :\equiv x \dot{-} y =_0 0$, onde x e y são variáveis de tipo 0.

Teremos de fazer algumas demonstrações, por dupla indução, de fórmulas $A(x^0, y^0)$ nas quais ocorre $x \dot{-} y$. No passo de indução temos de derivar $A(x, y) \to A(Sx, Sy)$, onde no antecedente ocorre $x \dot{-} y$ e no consequente ocorre $Sx \dot{-} Sy$. O próximo lema estabelece uma relação bastante útil entre estas fórmulas, que facilita as demonstrações por dupla indução.

Lema 129. *Temos* $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Sx \dot{-} Sy =_0 x \dot{-} y$.

Demonstração. Temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Sx \dot{-} Sy =_0 pd(Sx \dot{-} y) =_0 x \dot{-} y$, onde na primeira igualdade usámos o lema 52 e na segunda igualdade usámos o lema 53. □

O próximo objectivo é provar que a relação $\leq_0$ é relação de equivalência. A principal dificuldade está na transitividade, que demonstramos em dois passos: (i) primeiro provamos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \leq_0 Sy \leftrightarrow x \leq_0 y \vee x =_0 Sy$ (por dupla indução) e (ii) depois provamos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \leq_0 y \wedge y \leq_0 z \to x \leq_0 z$ (por indução em z). As demonstrações são simples mas fastidiosas.

Lema 130. *Temos*

1. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash 0 \leq_0 x$;

2. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Sx \leq_0 Sy \leftrightarrow x \leq_0 y$;

3. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \leq_0 0 \leftrightarrow x =_0 0$;

4. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x =_0 y \to x \leq_0 y$;

5. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \leq_0 Sy \leftrightarrow x \leq_0 y \vee x =_0 Sy$.

Demonstração.

1. Provamos esta alínea por indução em x. O caso base é fácil: temos $0 \leq_{\mathbb{N}} 0$, logo $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash 0 \leq_0 0$. Vejamos o passo de indução. Pelo lema 52, temos $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash 0 \dot{-} Sx =_0 pd(0 \dot{-} x) =_0 pd\,0 =_0 0$, onde $0 \dot{-} Sx =_0 0 \equiv 0 \leq_0 Sx$ e na segunda igualdade usámos a hipótese de indução $0 \leq_0 x \equiv 0 \dot{-} x =_0 0$.

2. Esta alínea resulta do lema 129.

3. Provamos por indução em x. O caso base é óbvio (basta notar que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash 0 \leq_0 0$ porque $0 \leq_{\mathbb{N}} 0$ e que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash 0 =_0 0$). No passo de indução notamos que o membro esquerdo $Sx \leq_0 0$ da equivalência é $Sx \dot{-} 0 =_0 0$, onde pelo lema 52 temos $Sx \dot{-} 0 =_0 Sx$, pelo que é equivalente ao membro direito $Sx =_0 0$ da equivalência.

4. Seja $A(x, y)$ a fórmula do enunciado. Vamos provar $A(x, y)$ por dupla indução (ver lema 49).

$\underline{\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x, 0)}$ Suponhamos o antecedente $x =_0 0$ de $A(x, 0)$. Pela alínea 3, temos o consequente de $x \leq_0 0$ de $A(x, 0)$.

$\underline{\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(0, y)}$ Basta notar que o consequente $0 \leq_0 y$ de $A(0, y)$ é derivável em HA_0^ω pela alínea 1.

$\underline{\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x, y) \to A(Sx, Sy)}$ Suponhamos $A(x, y)$ e o antecedente $Sx =_0 Sy$ de $A(Sx, Sy)$. Por um axioma de S vem $x =_0 y$, donde por $A(x, y)$ vem $x \leq_0 y$. Daqui, pela alínea 2, vem o consequente $Sx \leq_0 Sy$ de $A(Sx, Sy)$.

5. Seja $A(x, y)$ a fórmula do enunciado. Vamos provar $A(x, y)$ por dupla indução.

$\underline{\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(0, y)}$ Pela alínea 1 ambos os membros de $A(0, y)$ são deriváveis em HA_0^ω, logo $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(0, y)$.

$\underline{\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x, 0)}$ Provamos $A(x, 0)$ por indução em x. O caso base é uma caso particular de $A(0, y)$. Vejamos o passo de indução. Suponhamos $A(x, 0)$. Queremos provar

$$A(Sx, 0) \equiv Sx \leq_0 S0 \leftrightarrow Sx \leq_0 0 \vee Sx =_0 S0.$$

Vejamos a implicação da esquerda para a direita. Suponhamos $Sx \leq_0 S0$. Pela alínea 2 vem $x \leq_0 0$. Pela alínea 3 vem $x =_0 0$, logo $Sx =_0 S0$.
Vejamos a implicação da direita para a esquerda. Se for $Sx \leq_0 0$, então pela alínea 3 vem $Sx =_0 0$, logo pelo axioma $Sx \neq_0 0$ vem $\perp$, e portanto temos $Sx \leq_0 S0$. Se for $Sx =_0 S0$, então pela alínea 4 vem $Sx \leq_0 S0$.

$\underline{\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x,y) \to A(Sx,Sy)}$ Suponhamos $A(x,y)$. Queremos provar

$$A(Sx,Sy) \equiv Sx \leq_0 S(Sy) \leftrightarrow Sx \leq_0 Sy \vee Sx =_0 S(Sy).$$

Vejamos a implicação da esquerda para a direita. Suponhamos $Sx \leq_0 S(Sy)$. Pela alínea 2 vem $x \leq_0 Sy$. Por $A(x,y)$ vem $x \leq_0 y \vee x =_0 Sy$. Novamente pela alínea 2 vem $Sx \leq_0 Sy \vee Sx =_0 S(Sy)$.
Vejamos a implicação da direita para a esquerda. Se for $Sx \leq_0 Sy$, então pela alínea 2 vem $x \leq_0 y$. Por $A(x,y)$ vem $x \leq_0 Sy$. Novamente pela alínea 2 vem $Sx \leq_0 S(Sy)$.
Se for $Sx =_0 S(Sy)$, então pela alínea 4 vem $Sx \leq_0 S(Sy)$. □

Teorema 131 ($\leq_0$ é relação de equivalência)**.** *Temos*

1. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \leq_0 x$;
2. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \leq_0 y \wedge y \leq_0 x \to x =_0 y$;
3. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \leq_0 y \wedge y \leq_0 z \to x \leq_0 z$.

Demonstração.

1. Provamos por indução em x. O caso base é óbvio (basta notar que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash 0 \leq_0 0$ porque $0 \leq_{\mathbb{N}} 0$). Para o passo de indução, supomos $x \leq_0 x$ e concluímos $Sx \leq_0 Sx$ pelo lema 130.

2. Suponhamos $x \leq_0 y$ e $y \leq_0 x$, isto é, $x \dot{-} y =_0 0$ e $y \dot{-} x =_0 0$. Pelo lema 52 temos $0+0 =_0 0$, logo $(x \dot{-} y) + (y \dot{-} x) =_0 0$. Pelo mesmo lema temos $|x-y| =_0 (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$, logo $|x-y| =_0 0$. Pelo lema 53 resulta $x =_0 y$.

3. Provamos por indução em z.

<u>Caso base</u> Queremos provar $x \leq_0 y \wedge y \leq_0 0 \to x \leq_0 0$. Suponhamos o antecedente. Pelo lema 130 temos $y =_0 0$, logo de $x \leq_0 y$ vem $x \leq_0 0$.

<u>Passo de indução</u> Por hipótese de indução supomos $x \leq_0 y \wedge y \leq_0 z \to x \leq_0 z$. Queremos provar $x \leq_0 y \wedge y \leq_0 Sz \to x \leq_0 Sz$. Suponhamos $x \leq_0 y \wedge y \leq_0 Sz$. Pelo lema 130, de $y \leq_0 Sz$ vem $y \leq_0 z \vee y =_0 Sz$.
Se for $y \leq_0 z$, então, por hipótese de indução, vem $x \leq_0 z$, donde pelo lema 130 vem $x \leq_0 Sz$.
Se for $y =_0 Sz$, então de $x \leq_0 y$ vem $x \leq_0 Sz$. □

Mais à frente iremos precisar do lema seguinte.

Lema 132. *Temos* $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash Sx \leq_0 y \to x \leq_0 y$.

Demonstração. Provamos o resultado por indução em y. No caso base o antecedente $Sx \leq_0 0$ implica $Sx =_0 0$ pelo lema 130, donde pelo axioma $Sx \neq_0 0$ sai $\perp$ e portanto temos o consequente. Para o passo de indução, do antecedente $Sx \leq_0 Sy$ sai pelo mesmo lema $x \leq_0 y$, donde $x \leq_0 Sy$ pelo dito lema. □

7.2 Máximo

Procuramos definir um termo max que represente dentro de HA_0^ω o máximo entre dois números naturais. Temos $\max(m,n) =_{\mathbb{N}} (m \dot{-} n) + n$, o que motiva a seguinte definição.

Definição 133. Definimos os termos $\max_\rho$ de tipo $\rho\rho\rho$ por indução nos tipos:

1. $\max_0 :\equiv \lambda x^0, y^0 \,.\, [(x \dot{-} y) + y]$;
2. $\max_{\sigma\rho} :\equiv \lambda x^{\sigma\rho}, y^{\sigma\rho}, z^\rho \,.\, [\max_\sigma (xz)(yz)]$.

Se $\underline{t}^{\underline{\rho}} = t_1^{\rho_1}, \ldots, t_k^{\rho_k}$ e $\underline{q}^{\underline{\rho}} = q_1^{\rho_1}, \ldots, q_k^{\rho_k}$ são uplos de termos de HA_0^ω, então denotamos o uplo $\max_{\rho_1} t_1 q_1, \ldots, \max_{\rho_k} t_k q_k$ por $\max_{\underline{\rho}}(\underline{t}, \underline{q})$.

De seguida provamos algumas propriedades elementares do termo $\max_0$, das quais precisamos para trabalhar de forma expedita com este termo.

Lema 134. *Temos*

1. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \leq_0 \max_0 xy$ *e* $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash y \leq_0 \max_0 xy$;
2. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \leq_0 z \wedge y \leq_0 z \to \max_0 xy \leq_0 z$;
3. $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \leq_0 x' \wedge y \leq_0 y' \to \max_0 xy \leq_0 \max_0 x'y'$.

Demonstração.

1. Seja $A(x,y) :\equiv x \leq_0 \max_0 xy$. Provamos $A(x,y)$ por dupla indução (ver lema 49).

$\underline{\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x,0)}$ Temos $A(x,0) \leftrightarrow x \leq_0 (x \dot{-} 0) + 0$. Pelo lema 52 temos $(x \dot{-} 0) + 0 =_0 x \dot{-} 0$ e $x \dot{-} 0 =_0 x$, logo $(x \dot{-} 0) + 0 =_0 x$. Portanto, $A(x,0) \leftrightarrow x \leq_0 x$. Pelo teorema 131 temos $x \leq_0 x$, logo temos $A(x,0)$.

$\underline{\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(0,y)}$ $A(0,y)$ é derivável em HA_0^ω pelo lema 130 porque o seu membro esquerdo é 0.

$\underline{\mathsf{HA}_0^\omega \vdash A(x,y) \to A(Sx,Sy)}$ Aplicando duas vezes o lema 129 (na primeira e terceira igualdades) e aplicando o lema 52 (na segunda igualdade) temos

$$\begin{aligned} \mathsf{HA}_0^\omega \vdash x \dot{-} [(x \dot{-} y) + y] &=_0 Sx \dot{-} S[(x \dot{-} y) + y] \\ &=_0 Sx \dot{-} [(x \dot{-} y) + Sy] \\ &=_0 Sx \dot{-} [(Sx \dot{-} Sy) + Sy], \end{aligned}$$

logo

$$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash \underbrace{x \dot{-} [(x \dot{-} y) + y] =_0 0}_{\leftrightarrow A(x,y)} \to \underbrace{Sx \dot{-} [(Sx \dot{-} Sy) + Sy] =_0 0}_{\leftrightarrow A(Sx,Sy)}.$$

Demonstramos $B(x,y) :\equiv y \leq_0 \max_0 xy$ também por dupla indução. O caso $B(x,0)$ é perfeitamente análogo ao caso $A(0,y)$. O caso $B(0,y)$ é quase análogo ao caso $A(x,0)$ (pode ser útil saber que $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash 0 \dot{-} y =_0 0$ e $\mathsf{HA}_0^\omega \vdash 0 + y =_0 y$, factos estes que provamos facilmente por indução em y com a ajuda do lema 52). O caso $B(x,y) \to B(Sx,Sy)$ é perfeitamente análogo ao caso $A(x,y) \to A(Sx,Sy)$.

2. Seja $A(x,y,z)$ a fórmula do enunciado. Temos

$$A(x,y,z) \leftrightarrow \underbrace{\left[x \dot{-} z =_0 0 \wedge y \dot{-} z =_0 0 \to \big((x \dot{-} y) + y\big) \dot{-} z =_0 0\right]}_{\equiv: B(x,y,z)}.$$

Provamos $B(x,y,z)$ por indução tripla (ver lema 49).

<u>$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash B(0,y,z)$</u> Supomos o antecedente de $B(0,y,z)$ e queremos provar $[(0 \dot{-} y) + y] \dot{-} z =_0 0$. Como observado na alínea anterior, temos $0 \dot{-} y =_0 0$ e $0 + y =_0 y$, logo $(0 \dot{-} y) + y =_0 y$. Daqui vem $[(0 \dot{-} y) + y] \dot{-} z =_0 0$ atendendo à hipótese $y \dot{-} z =_0 0$.

<u>$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash B(x,0,z)$</u> Supomos o antecedente de $B(x,0,z)$ e queremos provar $[(x \dot{-} 0) + 0] \dot{-} z =_0 0$. Pelo lema 52 temos $x \dot{-} 0 =_0 x$, logo pelo mesmo lema temos $(x \dot{-} 0) + 0 =_0 x$. Daqui, pela hipótese $x \dot{-} z =_0 0$, vem $[(x \dot{-} 0) + 0] \dot{-} z =_0 0$.

<u>$\mathsf{HA}_0^\omega \vdash B(x,y,0)$</u> Supomos o antecedente de $B(x,y,0)$ e queremos provar $[(x \dot{-} y) + y] \dot{-} 0 =_0 0$. Pelo lema 52 vem $x =_0 0$ e $y =_0 0$, logo, pelo mesmo lema, $(x \dot{-} y) + y =_0 0$. Daqui, ainda pelo mesmo lema, sai $[(x \dot{-} y) + y] \dot{-} 0 =_0 0$.

<u>$B(x,y,z) \to B(Sx,Sy,Sz)$</u> Usando os lemas 52 e 129 facilmente reduzimos $B(Sx,Sy,Sz)$ a $B(x,y,z)$.

3. Suponhamos $x \leq_0 x'$ e $y \leq_0 y'$. Seja $z :\equiv \max_0 x'y'$. Pela alínea 1 temos $x' \leq_0 z$ e $y' \leq_0 z$. Pela transitividade de $\leq_0$ (ver teorema 131) vem $x \leq_0 z$ e $y \leq_0 z$. Daqui pela alínea 2 sai o resultado. □

7.3 Aritméticas de Heyting e de Peano com majoração intensional

Vamos agora considerar uma "extensão" da aritmética de Heyting introduzindo--lhe uma nova "relação de menor ou igual", que vai ser um objecto sintáctico novo.

Definição 135. A *aritmética de Heyting em todos os tipos finitos com tratamento minimal da igualdade e majoração intensional*, denotada por $\mathsf{HA}_{0\trianglelefteq}^\omega$, é formada pela seguinte linguagem e pelo seguinte sistema de dedução formal.

<u>Linguagem</u> Definimos a linguagem de $\mathsf{HA}_{0\trianglelefteq}^\omega$ como sendo a de HA_0^ω com a adição de

1. símbolos relacionais binários $\trianglelefteq_\rho$ para cada tipo finito ρ;

2. quantificações $\forall x \trianglelefteq_\rho tA$ e $\exists x \trianglelefteq_\rho tA$ chamadas *quantificações limitadas*, onde t é um termo no qual a variável x não ocorre (as quantificações são objectos sintácticos novos, *não* são abreviaturas de $\forall x(x \trianglelefteq_\rho t \to A)$ e $\exists x(x \trianglelefteq_\rho t \wedge A)$).

Consideramos que as palavras da forma $t \trianglelefteq_\rho q$, onde t e q são termos, são fórmulas atómicas.
Dizemos que uma fórmula é *limitada* se e só se as quantificações que nela ocorrem são limitadas.

<u>Axiomas e regras</u> Para além dos axiomas e regras de HA_0^ω, $\mathsf{HA}_{0\trianglelefteq}^\omega$ tem

1. os axiomas

$$\begin{array}{ll} \mathsf{B}_\forall: & \forall x \trianglelefteq tA \leftrightarrow \forall x(x \trianglelefteq t \to A), \\ \mathsf{B}_\exists: & \exists x \trianglelefteq tA \leftrightarrow \exists x(x \trianglelefteq t \wedge A), \end{array}$$

   (B vem do inglês *bounded*) onde a variável x não ocorre no termo t;

2. os axiomas

$$\begin{array}{ll} \mathsf{M}_1: & x \trianglelefteq_0 y \leftrightarrow x \leq_0 y, \\ \mathsf{M}_2: & x \trianglelefteq_{\sigma\rho} y \to \forall u \trianglelefteq_\rho v(xu \trianglelefteq_\sigma yv \wedge yu \trianglelefteq_\sigma yv), \end{array}$$

   (M vem de majoração; notemos que no último axioma só temos uma implicação);

3. a regra

$$\mathsf{RL}_\trianglelefteq: \quad \frac{A_l \wedge u \trianglelefteq_\rho v \to tu \trianglelefteq_\sigma qv \wedge qu \trianglelefteq_\sigma qv}{A_l \to t \trianglelefteq_{\sigma\rho} q}$$

   ($\mathsf{RL}_\trianglelefteq$ vem do inglês *RuLe*) onde A_l é uma fórmula limitada, t e q são termos e $u, v \notin FV(A_l \to t \trianglelefteq_{\sigma\rho} q)$.

4. O axioma de indução IA é estendido a $\mathsf{HA}_{0\trianglelefteq}^\omega$, isto é, postulamos que para todas as fórmulas de $\mathsf{HA}_{0\trianglelefteq}^\omega$ (e não apenas para as fórmulas de HA_0^ω) vale IA (já os axiomas Π, Σ, $\underline{R}$ e $x =_0 y \wedge A(x) \to A(y)$ não precisam de ser estendidos a $\mathsf{HA}_{0\trianglelefteq}^\omega$).

Definição 136. Definimos a *aritmética de Peano em todos os tipos finitos com tratamento minimal da igualdade e majoração intensional*, denotada por $\mathsf{PA}_{0\trianglelefteq}^\omega$, como sendo $\mathsf{HA}_{0\trianglelefteq}^\omega + \mathsf{LEM}$.

Dizemos que a majoração $\trianglelefteq$ é *intensional* porque o seu comportamento é governado (ainda que parcialmente) por uma regra, a regra $\mathsf{RL}_\trianglelefteq$ (se fosse governado inteiramente por axiomas, diríamos que era uma majoração *extensional*).

Em $\forall u \trianglelefteq v(xu \trianglelefteq yv \wedge yu \trianglelefteq yv)$, a fórmula $xu \trianglelefteq yv$ significa que x está "acima" de y e a fórmula $yu \trianglelefteq yv$ significa que y é monótono (isto é, não-decrescente).

Observação 137. Se em $\mathsf{RL}_\trianglelefteq$ tomarmos A_l como sendo uma fórmula limitada tal que $\mathsf{HA}_{0\trianglelefteq}^\omega \vdash A_l$ (por exemplo, $A_l \equiv 0 =_0 0$), então obtemos a regra

$$\frac{u \trianglelefteq_\rho v \to tu \trianglelefteq_\sigma qv \wedge qu \trianglelefteq_\sigma qv}{t \trianglelefteq_{\sigma\rho} q}.$$

Definição 138.

1. Estendemos a noção de *variável livre* aos termos e fórmulas de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} FV(t \trianglelefteq q) &:= FV(t) \cup FV(q), \\ FV(\forall x \trianglelefteq tA) &:= FV(t) \cup [FV(A) \setminus \{x\}], \\ FV(\exists x \trianglelefteq tA) &:= FV(t) \cup [FV(A) \setminus \{x\}]. \end{aligned}$$

2. Estendemos a noção de *substituição simultânea* às fórmulas de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$ da seguinte forma: se $\underline{y} = y_1, \ldots, y_n$ for um uplo de variáveis, $\underline{r} = r_1, \ldots, r_n$ for um uplo de termos, $\underline{y}^{(i)} = y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ e $\underline{r}^{(i)} = r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_n$, então

$$\begin{aligned} (t \trianglelefteq q)[\underline{r}/\underline{y}] &:\equiv (t[\underline{r}/\underline{y}])(q[\underline{r}/\underline{y}]), \\ (\forall x \trianglelefteq tA)[\underline{r}/\underline{y}] &:\equiv \begin{cases} \forall x \trianglelefteq (t[\underline{r}/\underline{y}])(A[\underline{r}/\underline{y}]) & \text{se } x \not\equiv y_1, \ldots, y_n \\ \forall x \trianglelefteq (t[\underline{r}^{(i)}/\underline{y}^{(i)}])(A[\underline{r}^{(i)}/\underline{y}^{(i)}]) & \text{se } x \equiv y_i \end{cases}, \\ (\exists x \trianglelefteq tA)[\underline{r}/\underline{y}] &:\equiv \begin{cases} \exists x \trianglelefteq (t[\underline{r}/\underline{y}])(A[\underline{r}/\underline{y}]) & \text{se } x \not\equiv y_1, \ldots, y_n \\ \exists x \trianglelefteq (t[\underline{r}^{(i)}/\underline{y}^{(i)}])(A[\underline{r}^{(i)}/\underline{y}^{(i)}]) & \text{se } x \equiv y_i \end{cases}. \end{aligned}$$

3. Estendemos a noção de *termo livre para uma variável numa fórmula* às fórmulas de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$ pela seguinte claúsula: o termo q está livre para a variável y na fórmula $\exists\!\!\!\!\forall x \trianglelefteq_{\rho} tA$, onde $\exists\!\!\!\!\forall \in \{\forall, \exists\}$, se e só se $x \equiv y$ ou simultaneamente tivermos $x \not\equiv y$, $x \notin FV(t[q/y])$ e q está livre para y em A.

Notacao 139. Sejam $\underline{t}^{\underline{\rho}} = t_1^{\rho_1}, \ldots, t_n^{\rho_n}$ e $\underline{q}^{\underline{\rho}} = q_1^{\rho_1}, \ldots, q_n^{\rho_n}$ uplos de termos de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$ e $\underline{x} = x_1^{\rho_1}, \ldots, x_n^{\rho_n}$ um uplo de variáveis de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$ tal que cada x_i não ocorre em cada t_i. Definimos

$$\begin{aligned} \underline{t} \trianglelefteq_{\underline{\rho}} \underline{q} &:\equiv t_1 \trianglelefteq_{\rho_1} q_1 \wedge \cdots \wedge t_n \trianglelefteq_{\rho_n} q_n, \\ \forall \underline{x} \trianglelefteq_{\underline{\rho}} \underline{t}A &:\equiv \forall x_1 \trianglelefteq_{\rho_1} t_1 \cdots \forall x_n \trianglelefteq_{\rho_n} t_n A, \\ \exists \underline{x} \trianglelefteq_{\underline{\rho}} \underline{t}A &:\equiv \exists x_1 \trianglelefteq_{\rho_1} t_1 \cdots \exists x_n \trianglelefteq_{\rho_n} t_n A, \\ \tilde{\forall} \underline{x} A &:\equiv \forall \underline{x}(\underline{x} \trianglelefteq_{\underline{\rho}} \underline{x} \to A), \\ \tilde{\exists} \underline{x} A &:\equiv \exists \underline{x}(\underline{x} \trianglelefteq_{\underline{\rho}} \underline{x} \wedge A), \\ \tilde{\forall} \underline{x} \trianglelefteq_{\underline{\rho}} \underline{t}A &:\equiv \forall \underline{x} \trianglelefteq_{\underline{\rho}} \underline{t}(\underline{x} \trianglelefteq \underline{x} \to A), \\ \tilde{\exists} \underline{x} \trianglelefteq_{\underline{\rho}} \underline{t}A &:\equiv \exists \underline{x} \trianglelefteq_{\underline{\rho}} \underline{t}(\underline{x} \trianglelefteq \underline{x} \wedge A). \end{aligned}$$

Às quantificações $\tilde{\forall}$ e $\tilde{\exists}$ chamamos *quantificações monótonas*. Em rigor, em $t_1 \trianglelefteq_{\rho_1} q_1 \wedge \cdots \wedge t_n \trianglelefteq_{\rho_n} q_n$ deveríamos determinar a ordem pela qual associamos as conjunções, mas como intuicionisticamente a conjunção comuta, tal ordem não é relevante.

Observação 140. Devido à restrição de em $\exists x \trianglelefteq tA$ (com $\exists \in \{\forall, \exists\}$) termos $x \notin FV(t)$, a linguagem de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$ não é fechada para substituições. Por exemplo, $[\exists x \trianglelefteq yA(x)][x/y] \equiv \exists x \trianglelefteq xA(x)[x/y]$ não é uma fórmula de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$. Esta dificuldade pode ser contornada renomeando as variáveis quantificadas. No exemplo anterior, trocando x por z (tal que $x \not\equiv z$), $[\exists z \trianglelefteq yA(z)][x/y] \equiv \exists z \trianglelefteq xA(z)[x/y]$ já é uma fórmula de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$.
Quando escrevermos $A[t/x]$ estamos natural a supor que $A[t/x]$ é uma fórmula de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$. Notemos que $(A \diamond B)[t/x]$ (com $\diamond \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$) é fórmula de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$ se e só se $A[t/x]$ e $B[t/x]$ o são. Também notemos que $(\exists yA)[t/x]$ é fórmula de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$ se e só se $x \equiv y$ ou $A[t/x]$ é fórmula de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$. Finalmente, $(\exists y \trianglelefteq qA)[t/x]$ é fórmula de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$ se e só se $x \equiv y$ ou simultaneamente $y \notin FV(q[t/x])$ e $A[t/x]$ é fórmula de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$. Estas observações podem ser úteis nas demonstrações por indução na complexidade das fórmulas: se estamos a tentar provar que a fórmula $(\exists yA)[t/x]$ de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$ tem uma certa propriedade, podíamos ser tentados, por hipótese de indução, a usar essa propriedade para $A[t/x]$, mas $A[t/x]$ pode não ser uma fórmula de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$.

Observação 141. Sejam $\underline{t}^{\underline{\rho}} = t_1^{\rho_1}, \ldots, t_n^{\rho_n}$ um uplo de termos de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$ e $\underline{x}^{\underline{\rho}} = x_1^{\rho_1}, \ldots, x_n^{\rho_n}$ um uplo de variáveis de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$ distintas tal que $x_i \notin FV(t_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Aplicando n vezes os axiomas $\mathsf{B}_{\forall}$ e $\mathsf{B}_{\exists}$ obtemos

$$\begin{aligned}
\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} &\vdash \forall \underline{x} \trianglelefteq_{\underline{\rho}} \underline{t} A \leftrightarrow \forall x_1[x_1 \trianglelefteq_{\rho_1} t_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \forall x_n(x_n \trianglelefteq_{\rho_n} t_n \rightarrow A) \cdots],\\
\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} &\vdash \exists \underline{x} \trianglelefteq_{\underline{\rho}} \underline{t} A \leftrightarrow \exists x_1[x_1 \trianglelefteq_{\rho_1} t_1 \wedge \cdots \wedge \exists x_n(x_n \trianglelefteq_{\rho_n} t_n \wedge A) \cdots].
\end{aligned}$$

Usando as regras de prenifixação, estas fórmulas podem ser simplificadas:

$$\begin{aligned}
\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} &\vdash \forall \underline{x} \trianglelefteq_{\underline{\rho}} \underline{t} A \leftrightarrow \forall \underline{x}(\underline{x} \trianglelefteq_{\underline{\rho}} \underline{t} \rightarrow A),\\
\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} &\vdash \exists \underline{x} \trianglelefteq_{\underline{\rho}} \underline{t} A \leftrightarrow \exists \underline{x}(\underline{x} \trianglelefteq_{\underline{\rho}} \underline{t} \wedge A).
\end{aligned}$$

Em geral a relação $\trianglelefteq$ não é reflexiva, embora se $x \trianglelefteq y$, então $y \trianglelefteq y$. Também não é anti-simétrica nem total. É no entanto transitiva.

Proposição 142. *Temos:*

1. $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash x \trianglelefteq_{\rho} y \rightarrow y \trianglelefteq_{\rho} y$;

2. $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash x \trianglelefteq_{\rho} y \wedge y \trianglelefteq_{\rho} z \rightarrow x \trianglelefteq_{\rho} z$.

Demonstração.

1. Fazemos a demonstração por indução nos tipos. O caso base $\rho = 0$ é equivalente (usando M_1) a $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash x \leq_0 y \rightarrow y \leq_0 y$, o que é obviamente verdade pelo teorema 131. Vejamos o passo de indução. Queremos provar $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash x \trianglelefteq_{\sigma\rho} y \rightarrow y \trianglelefteq_{\sigma\rho} y$. Pela regra $\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}$ basta provar

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash x \trianglelefteq_{\sigma\rho} y \wedge u \trianglelefteq_{\rho} v \rightarrow yu \trianglelefteq_{\sigma} yv \wedge yu \trianglelefteq_{\sigma} yv,$$

o que resulta de M_2.

2. Fazemos a demonstração por indução nos tipos. O caso base $\rho = 0$ é equivalente (usando M_1) a $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash x \leq_0 y \wedge y \leq_0 z \rightarrow x \leq_0 z$, o que já foi demonstrado no teorema 131. Vejamos o caso de indução. Queremos provar $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash x \trianglelefteq_{\sigma\rho} y \wedge y \trianglelefteq_{\sigma\rho} z \rightarrow x \trianglelefteq_{\sigma\rho} z$. Pela regra $\mathsf{RL}_\trianglelefteq$ basta provar

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash x \trianglelefteq_{\sigma\rho} y \wedge y \trianglelefteq_{\sigma\rho} z \wedge u \trianglelefteq_\rho v \rightarrow xu \trianglelefteq_\sigma zv \wedge zu \trianglelefteq_\sigma zv. \tag{7.1}$$

Suponhamos o antecedente de (7.1). De $u \trianglelefteq_\rho v$ vem, pela alínea 1, $v \trianglelefteq_\rho v$. De $x \trianglelefteq_{\sigma\rho} y$ e $u \trianglelefteq_\rho v$ vem, por M_2, $xu \trianglelefteq_\sigma yv$. De $y \trianglelefteq_{\sigma\rho} z$ e $v \trianglelefteq_\rho v$ vem, por M_2, $yv \trianglelefteq_\sigma zv$. De $xu \trianglelefteq_\sigma yv$ e $yv \trianglelefteq_\sigma zv$ vem, por hipótese de indução, $xu \trianglelefteq_\sigma zv$. De $y \trianglelefteq_{\sigma\rho} z$ e $u \trianglelefteq_\rho v$ vem, por M_2, $zu \trianglelefteq_\sigma zv$. Portanto temos o consequente de (7.1). $\square$

Na próxima proposição generalizamos a regra $\mathsf{RL}_\trianglelefteq$ de variáveis simples u e v a uplos de variáveis $\underline{u}$ e $\underline{v}$.

Proposição 143 (generalização de $\mathsf{RL}_\trianglelefteq$). *Em* $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ *vale a regra*

$$\frac{A_l \wedge \underline{u} \trianglelefteq_{\underline{\rho}} \underline{v} \rightarrow t\underline{u} \trianglelefteq_\sigma q\underline{v} \wedge q\underline{u} \trianglelefteq_\sigma q\underline{v}}{A_l \rightarrow t \trianglelefteq_{\sigma\underline{\rho}^t} q},$$

isto é,

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash A_l \wedge \underline{u} \trianglelefteq_\rho \underline{v} \rightarrow t\underline{u} \trianglelefteq_\sigma q\underline{v} \wedge q\underline{u} \trianglelefteq_\sigma q\underline{v} \;\Rightarrow\; \mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash A_l \rightarrow t \trianglelefteq_{\sigma\underline{\rho}^t} q,$$

onde A_l é uma fórmula limitada de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$, t e q são termos de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ e as variáveis $\underline{u}, \underline{v}$ são distintas e não ocorrem livres em $A_l \rightarrow t \trianglelefteq_{\sigma\underline{\rho}^t} q$.

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução no número de variáveis de $\underline{u}$. O caso base é a regra $\mathsf{RL}_\trianglelefteq$. Vejamos o passo de indução. Usemos as notações

$$\begin{aligned} \underline{u}^{(n)} &= u_1, \ldots, u_n, & \underline{u}^{(n+1)} &= u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \\ \underline{v}^{(n)} &= v_1, \ldots, v_n, & \underline{v}^{(n+1)} &= v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}. \end{aligned}$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que vale a regra

$$\frac{A_l \wedge \underline{u}^{(n)} \trianglelefteq \underline{v}^{(n)} \rightarrow t\underline{u}^{(n)} \trianglelefteq q\underline{v}^{(n)} \wedge q\underline{u}^{(n)} \trianglelefteq q\underline{v}^{(n)}}{A_l \rightarrow t \trianglelefteq q}.$$

e que

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash A_l \wedge \underline{u}^{(n+1)} \trianglelefteq \underline{v}^{(n+1)} \rightarrow t\underline{u}^{(n+1)} \trianglelefteq q\underline{v}^{(n+1)} \wedge q\underline{u}^{(n+1)} \trianglelefteq q\underline{v}^{(n+1)} \tag{7.2}$$

Em particular, pondo $\underline{u}^{(n)} = \underline{v}^{(n)}$ vem

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash A_l \wedge \underline{v}^{(n)} \trianglelefteq \underline{v}^{(n)} \wedge u_{n+1} \trianglelefteq v_{n+1} \rightarrow t\underline{v}^{(n)} u_{n+1} \trianglelefteq q\underline{v}^{(n)} v_{n+1} \wedge q\underline{v}^{(n)} u_{n+1} \trianglelefteq q\underline{v}^{(n)} v_{n+1}. \tag{7.3}$$

Suponhamos $A_l \wedge \underline{u}^{(n+1)} \trianglelefteq \underline{v}^{(n+1)}$, isto é, $A_l \wedge \underline{u}^{(n)} \trianglelefteq \underline{v}^{(n)} \wedge u_{n+1} \trianglelefteq v_{n+1}$. Vem $\underline{v}^{(n)} \trianglelefteq \underline{v}^{(n)}$. De (7.2), novamente (7.2), e de (7.3) vem, respectivamente,

$$\underbrace{t\underline{u}^{(n+1)} \trianglelefteq q\underline{v}^{(n+1)}}_{\equiv t\underline{u}^{(n)}u_{n+1} \trianglelefteq q\underline{v}^{(n)}v_{n+1}}, \qquad \underbrace{q\underline{u}^{(n+1)} \trianglelefteq q\underline{v}^{(n+1)}}_{\equiv q\underline{u}^{(n)}u_{n+1} \trianglelefteq q\underline{v}^{(n)}v_{n+1}}, \qquad q\underline{v}^{(n)}u_{n+1} \trianglelefteq q\underline{v}^{(n)}v_{n+1}.$$

Portanto temos

$$\begin{array}{lll} \mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} & \vdash & A_l \wedge \underline{u}^{(n)} \trianglelefteq \underline{v}^{(n)} \wedge u_{n+1} \trianglelefteq v_{n+1} \to \\ & & t\underline{u}^{(n)}u_{n+1} \trianglelefteq q\underline{v}^{(n)}v_{n+1} \wedge q\underline{v}^{(n)}u_{n+1} \trianglelefteq q\underline{v}^{(n)}v_{n+1}, \\ \mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} & \vdash & A_l \wedge \underline{u}^{(n)} \trianglelefteq \underline{v}^{(n)} \wedge u_{n+1} \trianglelefteq v_{n+1} \to \\ & & q\underline{u}^{(n)}u_{n+1} \trianglelefteq q\underline{v}^{(n)}v_{n+1} \wedge q\underline{v}^{(n)}u_{n+1} \trianglelefteq q\underline{v}^{(n)}v_{n+1}, \end{array}$$

donde por $\mathsf{RL}_\trianglelefteq$ vem

$$\begin{array}{lll} \mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} & \vdash & A_l \wedge \underline{u}^{(n)} \trianglelefteq \underline{v}^{(n)} \to t\underline{u}^{(n)} \trianglelefteq q\underline{v}^{(n)}, \\ \mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} & \vdash & A_l \wedge \underline{u}^{(n)} \trianglelefteq \underline{v}^{(n)} \to q\underline{u}^{(n)} \trianglelefteq q\underline{v}^{(n)}, \end{array}$$

logo

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash A_l \wedge \underline{u}^{(n)} \trianglelefteq \underline{v}^{(n)} \to t\underline{u}^{(n)} \trianglelefteq q\underline{v}^{(n)} \wedge q\underline{u}^{(n)} \trianglelefteq q\underline{v}^{(n)}.$$

O resultado sai daqui pela hipótese de indução. □

Vamos estender o lema 28 a $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ de forma a, analogamente ao que fizemos no corolário 29, podermos provar o corolário 145 que generaliza o comportamento de Π, Σ e $\underline{R}$ a fórmulas arbitrárias.

Lema 144. *Sejam $\underline{t} = t_1, \ldots, t_n$ e $\underline{q} = q_1, \ldots, q_n$ uplos de termos de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$. Se para toda a fórmula atómica A_{at} de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ temos $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash A_{at}[\underline{t}/\underline{x}] \leftrightarrow A_{at}[\underline{q}/\underline{x}]$, então para toda a fórmula A de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ temos $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash A[\underline{t}/\underline{x}] \leftrightarrow A[\underline{q}/\underline{x}]$.*

Demonstração. Demonstramos o resultado por indução na complexidade das fórmulas. Todos os casos, excepto os dos quantificadores limitados, são análogos à demonstração do lema 28. Resta ver os casos dos quantificadores limitados.

$\underline{\forall y \trianglelefteq r A}$ Como a fórmula $y \trianglelefteq r$ é atómica, então por hipótese temos $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash (y \trianglelefteq r)[\underline{t}/\underline{x}] \leftrightarrow (y \trianglelefteq r)[\underline{q}/\underline{x}]$ para todas as variáveis $\underline{x}$ (de tipos compatíveis com $\underline{t}$ e $\underline{q}$). Temos dois casos.

1. $\underline{y \not\equiv x_1, \ldots, x_n}$ Por $\mathsf{B}_\forall$, temos

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash (\forall y \trianglelefteq r A)[\underline{t}/\underline{x}] & \equiv & \forall y \trianglelefteq r[\underline{t}/\underline{x}] A[\underline{t}/\underline{x}] \\ & \leftrightarrow & \forall y (y \trianglelefteq r[\underline{t}/\underline{x}] \to A[\underline{t}/\underline{x}]) \\ & \leftrightarrow & \forall y (y \trianglelefteq r[\underline{q}/\underline{x}] \to A[\underline{q}/\underline{x}]) \\ & \leftrightarrow & \forall y \trianglelefteq r[\underline{q}/\underline{x}] A[\underline{q}/\underline{x}] \\ & \equiv & (\forall y \trianglelefteq r A)[\underline{q}/\underline{x}]. \end{array}$$

2. $\underline{y \equiv x_i}$ Temos

$$\begin{array}{rcl}(\forall y \trianglelefteq rA)[\underline{t}/\underline{x}] & \equiv & \forall y \trianglelefteq r[t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_n/x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n] \\ & & A[t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_n/x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n], \\ (\forall y \trianglelefteq rA)[\underline{q}/\underline{x}] & \equiv & \forall y \trianglelefteq r[q_1,\ldots,q_{i-1},q_{i+1},\ldots,q_n/x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n] \\ & & A[q_1,\ldots,q_{i-1},q_{i+1},\ldots,q_n/x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n].\end{array}$$

As matrizes de $(\forall y \trianglelefteq rA)[\underline{t}/\underline{x}]$ e $(\forall \trianglelefteq ryA)[\underline{q}/\underline{x}]$ são equivalentes, pois tomando uma variável $z \notin FV(A)$ do mesmo tipo de t_i temos, por hipótese de indução (que se aplica ao uplo de variáveis $x_1,\ldots,x_{i-1},z,x_{i+1},\ldots,x_n$),

$$\begin{array}{rl}A[t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_n/x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n] & \equiv \\ A[t_1,\ldots,t_n/x_1,\ldots,x_{i-1},z,x_{i+1},\ldots,x_n] & \leftrightarrow \\ A[q_1,\ldots,q_n/x_1,\ldots,x_{i-1},z,x_{i+1},\ldots,x_n] & \equiv \\ A[q_1,\ldots,q_{i-1},q_{i+1},\ldots,q_n/x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n]. & \end{array}$$

Por um argumento análogo temos

$$\begin{array}{c}y \trianglelefteq r[t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_n/x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n] \leftrightarrow \\ y \trianglelefteq r[q_1,\ldots,q_{i-1},q_{i+1},\ldots,q_n/x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n].\end{array}$$

Destas duas equivalências sai, de forma análoga à alínea anterior, $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash (\forall y \trianglelefteq rA)[\underline{t}/\underline{x}] \leftrightarrow (\forall y \trianglelefteq rA)[\underline{q}/\underline{x}]$.

$\underline{\exists y \trianglelefteq rA}$ Este caso é análogo ao anterior. □

Corolario 145. *Para toda a fórmula A de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$, temos*

1. $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash x =_0 y \wedge A[x/z] \to A[y/z]$ *se x e y estiverem livres para z em A;*
2. $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash A[\Pi_{\rho,\tau}x^{\rho}y^{\tau}/w^{\rho}] \leftrightarrow A[x/w]$*;*
3. $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash A[\Sigma_{\delta,\rho,\tau}x^{\tau\rho\delta}y^{\rho\delta}z^{\delta}/w^{\tau}] \leftrightarrow A[xz(yz)/w]$*;*
4. $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash A[\underline{R}_{\underline{\rho}}0\underline{y}^{\underline{\rho}}\underline{z}^{\underline{\rho}0\underline{\rho}^t}/\underline{w}^{\underline{\rho}}] \leftrightarrow A[\underline{y}/\underline{w}]$*;*
   $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash A[\underline{R}_{\underline{\rho}}(Sx^0)\underline{y}^{\underline{\rho}}\underline{z}^{\underline{\rho}0\underline{\rho}^t}/\underline{w}^{\underline{\rho}}] \leftrightarrow A[\underline{z}(\underline{R}_{\underline{\rho}}x\underline{y}\,\underline{z})x/\underline{w}]$.

Demonstração.

1. Começamos por verificar a alínea 1 para as fórmulas atómicas. Caso A seja uma fórmula atómica de HA^{ω}_0, já sabemos que o resultado vale. Resta ver o caso em que A é uma fórmula atómica de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$ mas não de HA^{ω}_0, isto é, A é da forma $t \trianglelefteq_{\rho} q$. Fazemos a demonstração por indução no tipo ρ.

Caso base No caso base $\rho = 0$ queremos provar

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash x =_0 y \wedge t[x/z] \trianglelefteq_0 q[x/z] \to t[y/z] \trianglelefteq_0 q[y/z].$$

Usando M_1, tal é equivalente a

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash x =_0 y \wedge t[x/z] \leq_0 q[x/z] \to t[y/z] \leq_0 q[y/z],$$

isto é,

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash x =_0 y \wedge (t \dot{-} q =_0 0)[x/z] \to (t \dot{-} q =_0 0)[y/z],$$

o que é axioma de $=_0$.

<u>Passo de indução</u> Queremos provar

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash x =_0 y \wedge t[x/z] \trianglelefteq_{\sigma\rho} q[x/z] \to t[y/z] \trianglelefteq_{\sigma\rho} q[y/z].$$

Para tal, por $\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}$ é suficiente provar

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash x =_0 y \wedge t[x/z] \trianglelefteq_{\sigma\rho} q[x/z] \wedge u \trianglelefteq_{\rho} v \to t[y/z]u \trianglelefteq_{\sigma} q[y/z]v \wedge q[y/z]u \trianglelefteq_{\sigma} q[y/z]v.$$

Suponhamos o antecedente. Por M_2 vem $t[x/z]u \trianglelefteq_{\sigma} q[x/z]v \wedge q[x/z]u \trianglelefteq_{\sigma} q[x/z]v$. Por hipótese de indução, podemos substituir x por y e obter o consequente, como pretendido.

De seguida estendemos a alínea 1, por indução na complexidade das fórmulas, a fórmulas arbitrárias. Todos os casos são análogos à demonstração da proposição 27, excepto os casos dos quantificadores limitados.

<u>$\forall w \trianglelefteq t(z)A(z)$</u> Queremos provar

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash x =_0 y \wedge (\forall w \trianglelefteq tA)[x/z] \to (\forall w \trianglelefteq tA)[y/z].$$

No caso $w \equiv z$ temos $(\forall w \trianglelefteq tA)[x/z] \equiv (\forall w \trianglelefteq tA)[y/z]$, pelo que o resultado é óbvio. Suponhamos $w \not\equiv z$. Por hipótese de indução, temos $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash x =_0 y \wedge A(x) \to A(y)$. Como a fórmula $w \trianglelefteq t$ é atómica, temos $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash y =_0 x \wedge w \trianglelefteq t(y) \to w \trianglelefteq t(x)$. Suponhamos $x =_0 y$ e $(\forall w \trianglelefteq tA)[x/z] \equiv \forall w \trianglelefteq t(x)A(x)$, isto é, $\forall w[w \trianglelefteq t(x) \to A(x)]$. Notemos que w não está livre na hipótese aberta $x =_0 y$, isto é, $w \not\equiv x, y$, porque x e y estão livres para z em $\forall w \trianglelefteq tA$ e $w \not\equiv z$. Usando $w \trianglelefteq t(y) \to w \trianglelefteq t(x)$, $w \trianglelefteq t(x) \to A(x)$ e $A(x) \to A(y)$, vem $\forall w[w \trianglelefteq t(y) \to A(y)]$, isto é, $\forall w \trianglelefteq t(y)A(y) \equiv (\forall w \trianglelefteq tA)[y/z]$.

<u>$\exists w \trianglelefteq t(z)A(z)$</u> Análogo ao caso anterior.

2. Pelo lema 144, basta verificarmos o resultado para as fórmulas atómicas. De forma análoga ao explicado na alínea anterior, resta verificar o resultado para as fórmulas atómicas da forma $t \trianglelefteq_{\rho} q$. Fazemos a demonstração por indução no tipo ρ.

<u>Caso base</u> De forma análoga à alínea anterior, usamos M_1 para reduzir o caso base a uma fórmula que é um axioma Π.

<u>Passo de indução</u> Queremos provar

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash t[\Pi xy/w] \trianglelefteq_{\sigma\rho} q[\Pi xy/w] \leftrightarrow t[x/w] \trianglelefteq_{\sigma\rho} q[x/w].$$

Vejamos a implicação da esquerda para a direita. Por $\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}$ é suficiente provar

$$\begin{aligned}\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \ \vdash \ & t[\Pi xy/w] \trianglelefteq_{\sigma\rho} q[\Pi xy/w] \wedge u \trianglelefteq_{\rho} v \to \\ & t[x/w]u \trianglelefteq_{\sigma} q[x/w]v \wedge q[x/w]u \trianglelefteq_{\sigma} q[x/w]v.\end{aligned}$$

Suponhamos o antecedente. Por M_2 vem $t[\Pi xy/w]u \trianglelefteq_\sigma q[\Pi xy/w]v$ e $q[\Pi xy/w]u \trianglelefteq_\sigma q[\Pi xy/w]v$. Por hipótese de indução, podemos substituir Πxy por x e obter o consequente.
A implicação da direita para a esquerda é análoga à implicação da esquerda para a direita.

Provamos as restantes alíneas de forma analogamente à alínea 2. $\square$

7.4 Aritméticas de Heyting e de Peano com majoração intensional são teorias de majoração

Sabemos que $\trianglelefteq$ não é reflexiva. Nem vale a propriedade mais fraca $\forall x \exists y (x \trianglelefteq_\rho y)$. No entanto, conseguimos provar que se t for um termo fechado, então existe um termo fechado q tal que $t \trianglelefteq_\rho q$. É esse o principal objectivo desta secção.

Definição 146. Seja t^ρ um termo de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ cujas variáveis são $\underline{x}^{\underline{\tau}}$.

1. Chamamos *majorante* de t a um termo q^ρ de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ cujas variáveis sejam $\underline{x}$ tal que $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \lambda \underline{x} \,.\, t \trianglelefteq_{\rho\underline{\tau}^t} \lambda \underline{x} \,.\, q$.
2. Dizemos que t é *monótono* se e só se t é majorante de t.

Observação 147. Seja t^ρ for um termo fechado. Um majorante de t é um termo q^ρ fechado tal que $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash t \trianglelefteq_\rho q$. O termo t é monótono se e só se $\mathsf{HA}^\omega_0 \vdash t \trianglelefteq_\rho t$.

Definição 148. Dizemos que uma teoria é uma *teoria de majoração* se e só se todos os seus termos têm majorante.

O objectivo desta secção é demonstrar que $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ é uma teoria de majoração. Este resultado é uma adaptação de um resultado de William Howard em [Howard 1973]. Mas antes precisamos de alguma trabalho preparatório.

Lema 149. *Temos:*

1. $\max_\rho$ *é monótono, isto é,* $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \max_\rho \trianglelefteq_{\rho\rho\rho} \max_\rho$*;*
2. $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash x \trianglelefteq_\rho x \wedge y \trianglelefteq_\rho y \to x \trianglelefteq_\rho \max_\rho xy \wedge y \trianglelefteq_\rho \max_\rho xy$.

Demonstração.
1. Provamos o resultado por indução nos tipos.

<u>Caso base</u> Pela generalização de $\mathsf{RL}_\trianglelefteq$ basta provar

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash x \trianglelefteq_0 x' \wedge y \trianglelefteq_0 y' \to \max_0 xy \trianglelefteq_0 \max_0 x'y',$$

que por M_1 reduz-se ao lema 134.

Passo de indução Pela generalização de $\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}$ basta provar

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash x \trianglelefteq_{\sigma\rho} x' \wedge y \trianglelefteq_{\sigma\rho} y' \to \max_{\sigma\rho} xy \trianglelefteq_{\sigma\rho} \max_{\sigma\rho} x'y'.$$

Para tal, é suficiente provar provar

$$\begin{aligned}\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \ \vdash \ & x \trianglelefteq_{\sigma\rho} x' \wedge y \trianglelefteq_{\sigma\rho} y' \wedge u \trianglelefteq_{\rho} v \to \\ & \underbrace{(\max_{\sigma\rho} xy)u \trianglelefteq_{\sigma} (\max_{\sigma\rho} x'y')v}_{\equiv:A} \wedge \underbrace{(\max_{\sigma\rho} x'y')u \trianglelefteq_{\sigma} (\max_{\sigma\rho} x'y')v}_{\equiv:B}.\end{aligned}$$

Suponhamos o antecedente. Por definição de max, A é equivalente a $\max_{\sigma}(xu)(yu) \trianglelefteq_{\sigma} \max_{\sigma}(x'v)(y'v)$. Ora, tal vem da hipótese de indução, de $xu \trianglelefteq_{\sigma} x'v$ e de $yu \trianglelefteq_{\sigma} y'v$. Também por definição de max, B é equivalente a $\max_{\sigma}(x'u)(y'u) \trianglelefteq_{\sigma} \max_{\sigma}(x'v)(y'v)$. Tal vem da hipótese de indução, de $x'u \trianglelefteq x'v$ e de $y'u \trianglelefteq y'v$ (temos $x' \trianglelefteq x'$, $y' \trianglelefteq y'$ por $x \trianglelefteq x'$, $y \trianglelefteq y'$ e pela proposição 142).

2. Provamos o resultado por indução nos tipos. O caso base reduz-se por M_1 ao lema 134. Vejamos o passo de indução. Queremos provar $x \trianglelefteq_{\sigma\rho} \max_{\sigma\rho} xy$ e $y \trianglelefteq_{\sigma\rho} \max_{\sigma\rho} xy$ a partir de $x \trianglelefteq_{\sigma\rho} x$ e $y \trianglelefteq_{\sigma\rho} y$. Basta ver o primeiro caso, pois o segundo é análogo. Por $\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}$, é suficiente provar

$$\begin{aligned}\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \ \vdash \ & x \trianglelefteq_{\sigma\rho} x \wedge y \trianglelefteq_{\sigma\rho} y \wedge u \trianglelefteq_{\rho} v \to \\ & \underbrace{xu \trianglelefteq_{\sigma} (\max_{\sigma\rho} xy)v}_{\equiv:A} \wedge \underbrace{(\max_{\sigma\rho} xy)u \trianglelefteq_{\sigma\rho} (\max_{\sigma\rho} xy)v}_{\equiv:B}.\end{aligned}$$

Suponhamos o antecedente. Por definição de max, A é equivalente a $xu \trianglelefteq_{\sigma} \max_{\sigma}(xv)(yv)$. Ora, tal vem da hipótese de indução $xv \trianglelefteq_{\sigma} xv \wedge yv \trianglelefteq_{\sigma} yv \to xv \trianglelefteq_{\sigma} \max_{\sigma}(xv)(yv) \wedge yv \trianglelefteq_{\sigma} \max_{\sigma}(xv)(yv)$, de $xv \trianglelefteq_{\sigma} xv \wedge yv \trianglelefteq_{\sigma} yv$, de $xu \trianglelefteq_{\sigma} xv$ e da transitividade de $\trianglelefteq_{\sigma}$. B sai da alínea anterior. $\square$

Quando quisermos provar que todo o termo é majorado, vamos ter o problema de majorar o recursor $(R_i)_{\underline{\rho}}$. Não vamos conseguir provar que $(R_i)_{\underline{\rho}}$ auto-majora-se, isto é, $(R_i)_{\underline{\rho}} \trianglelefteq (R_i)_{\underline{\rho}}$, pelo que temos de obter outro majorante. Esse majorante será um termo $[(R_i)_{\underline{\rho}}]^M$ cuja definição motivamos agora. Suponhamos que $x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função. Podemos definir uma função $x^M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ não decrescente, que ponto a ponto é não menor que x, isto é, $\forall z[x(z) \trianglelefteq x^M(z)]$, por

$$x^M(n) = \max\big(x(0), x(1), x(2), \ldots, x(n)\big).$$

Mais formalmente, podemos definir x^M por recursão por

$$\begin{cases} x^M(0) &= x(0) \\ x^M(n+1) &= \max\big(x^M(n), x(n+1)\big) \end{cases}.$$

Esta função x^M é uma candidata a majorante de x. O facto de ela ser não decrescente é fundamental para termos $x \trianglelefteq x^M$ em vez de apenas termos $\forall z[x(z) \trianglelefteq x^M(z)]$.

Definição 150. Seja $x^{\rho 0}$ um termo de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$. Definimos

$$x^M :\equiv \lambda z^0 \,.\, \Big[R_\rho z(x0)\lambda u^\rho, z^0 \,.\, \Big(\max\nolimits_\rho u\big(x(Sz)\big)\Big)\Big],$$

onde supomos que $z, u \notin FV(x)$.

O lema seguinte diz-nos que se x for menor ou igual a y ponto a ponto, então $x \trianglelefteq y^M$. Notemos que não se segue que $y \trianglelefteq y^M$ uma vez que em geral y não é menor ou igual a si próprio ponto a ponto porque $\trianglelefteq$ não é reflexiva. No entanto, no caso que nos interessa, $y = (R_i)_{\underline{\rho}}$, isso vai acontecer.

Lema 151. *Temos* $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \forall x^{\rho 0}, y^{\rho 0}[\forall z^0(xz \trianglelefteq_\rho yz) \to x \trianglelefteq_{\rho 0} y^M]$.

Demonstração. Comecemos por notar que para cada fórmula $A(w^\rho)$ de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ e para cada termo $x^{\rho 0}$ de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ temos

$$\begin{aligned} \mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} &\vdash A[x^M 0/w] \leftrightarrow A[x0/w], \\ \mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} &\vdash A[x^M(Sz)/w] \leftrightarrow A\big[\max\nolimits_\rho (x^M z)\big(x(Sz)\big)/w\big]. \end{aligned}$$

A demonstração destas duas equivalências é uma aplicação simples do comportamento do recursor dado pelo corolário 145.

Suponhamos $\forall z^0(xz \trianglelefteq_\rho yz)$. Por $\mathsf{RL}_\trianglelefteq$, para provar $x \trianglelefteq_{\rho 0} y^M$ basta provar $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash u \trianglelefteq_0 v \to xu \trianglelefteq_\rho y^M v$, ou equivalentemente, $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \forall u^0(u \trianglelefteq_0 v \to xu \trianglelefteq_\rho y^M v)$ (ter o u^0 quantificado universalmente vai dar jeito na demonstração). Fazemo-lo por indução em v.

<u>Caso base</u> Suponhamos $u \trianglelefteq_0 0$, o que por M_1 é equivalente a $u \leq_0 0$. Pelo lema 130 vem $u =_0 0$. Queremos provar $x0 \trianglelefteq_\rho y^M 0$, o que é equivalente a $x0 \trianglelefteq_\rho y0$. Como estamos a supor $\forall z^0(xz \trianglelefteq_\rho yz)$, então temos $x0 \trianglelefteq_\rho y0$, logo temos $x0 \trianglelefteq_\rho y^M 0$.

<u>Passo de indução</u> Temos $\forall u^0(u \trianglelefteq_0 v \to xu \trianglelefteq_\rho y^M v)$ como hipótese de indução e queremos provar $\forall u^0[u \trianglelefteq_0 Sv \to xu \trianglelefteq_\rho y^M(Sv)]$. Suponhamos $u \trianglelefteq_0 Sv$, que por M_1 é equivalente a $u \leq_0 Sv$, e provemos $xu \trianglelefteq_\rho y^M(Sv)$, o que é equivalente a $xu \trianglelefteq_\rho \max_\rho(y^M v)[y(Sv)]$. Comecemos por provar dois factos.

1. <u>$y^M v \trianglelefteq_\rho y^M v$</u> Temos $y^M v \trianglelefteq_\rho y^M v$ porque pondo $u = v$ na hipótese de indução (é aqui que dá jeito termos o u quantificado universalmente), obtemos $v \trianglelefteq_0 v \to xv \trianglelefteq_\rho y^M v$, cujo antecedente deriva-se em $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ (reduzindo-o por M_1 à reflexividade de $\leq_0$), e portanto $y^M v \trianglelefteq_\rho y^M v$ (pela proposição 142).

2. <u>$y(Sv) \trianglelefteq_\rho y(Sv)$</u> Temos $y(Sv) \trianglelefteq_\rho y(Sv)$ porque pondo $z = Sv$ em $\forall z^0(xz \trianglelefteq_\rho yz)$ sai $x(Sv) \trianglelefteq_\rho y(Sv)$, donde por sua vez sai $y(Sv) \trianglelefteq_\rho y(Sv)$ graças à proposição 142.

Estamos a supor $u \leq_0 Sv$, donde pelo lema 130 vem $u \leq_0 v \vee u =_0 Sv$.

1. $\underline{u \leq_0 v}$ Neste caso, pela hipótese de indução, temos $xu \trianglelefteq_\rho y^M v$. Como $y^M v \trianglelefteq_\rho y^M v$ e $ySv \trianglelefteq_\rho ySv$, então $y^M v \trianglelefteq_\rho \max_\rho(y^M v)[y(Sv)]$ pelo lema 149. Pela transitividade de $\trianglelefteq_\rho$ sai $xu \trianglelefteq_\rho \max_\rho(y^M v)[y(Sv)]$, o que equivale a $xu \trianglelefteq_\rho y^M(Sv)$, como pretendido.

2. $\underline{u =_0 Sv}$ Neste caso, pondo $z = u$ em $\forall z^0(xz \trianglelefteq_\rho yz)$ obtemos $xu \trianglelefteq_\rho y(Sv)$. Como $y^M v \trianglelefteq_\rho y^M v$ e $y(Sv) \trianglelefteq_\rho y(Sv)$, então $y(Sv) \trianglelefteq_\rho \max_\rho(y^M v)[y(Sv)]$. Pela transitividade de $\trianglelefteq_\rho$ sai $xu \trianglelefteq_\rho \max_\rho(y^M v)[y(Sv)]$, o que equivale a $xu \trianglelefteq_\rho y^M(Sv)$, como pretendido. □

Finalmente, no próximo teorema demonstramos que $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ é uma teoria de majoração.

Teorema 152 ($\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ é teoria de majoração)**.** *Todo o termo de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ tem um majorante. Dado um termo t de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$, podemos construir um majorante Mt de t da seguinte forma:*

1. *se t for um termo fechado, então definimos Mt por indução na complexidade dos termos fechados pelas condições*

$$\begin{aligned} Mt &:\equiv t \text{ se } t \in \{0, S, \Pi_{\rho,\tau}, \Sigma_{\delta,\rho,\tau}\}, \\ M(R_i)_{\underline{\rho}} &:\equiv [(R_i)_{\underline{\rho}}]^M, \\ M(t_1 t_2) &:\equiv (Mt_1)(Mt_2); \end{aligned}$$

2. *se t tiver variáveis $\underline{x}$, então definimos $Mt :\equiv (M\lambda \underline{x}\,.\,t)\underline{x}$.*

Demonstração. Vamos provar primeiro o resultado para as constantes. Para simplificar a notação, vamos omitir a escrita dos tipos.

$\underline{0}$ Temos $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash 0 \trianglelefteq 0$ porque por M_1 tal equivale a $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash 0 \leq_0 0$, o que é verdadeiro pela reflexividade de $\leq_0$.

$\underline{S}$ $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash S \trianglelefteq S$ resulta por $\mathsf{RL}_\trianglelefteq$ de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash u \trianglelefteq_0 v \to Su \trianglelefteq_0 Sv$, que por sua vez resulta por M_1 de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash u \leq_0 v \to Su \leq_0 Sv$. Ora, isto foi provado no lema 130.

$\underline{\Pi_{\rho,\tau}}$ $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \Pi \trianglelefteq \Pi$ resulta, pela generalização de $\mathsf{RL}_\trianglelefteq$, de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash x \trianglelefteq x' \wedge y \trianglelefteq y' \to \Pi xy \trianglelefteq \Pi x'y'$, que pelo corolário 145 equivale a $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash x \trianglelefteq x' \wedge y \trianglelefteq y' \to x \trianglelefteq x'$, o que é obviamente verdade.

$\underline{\Sigma_{\delta,\rho,\tau}}$ $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \Sigma \trianglelefteq \Sigma$ resulta, pela generalização de $\mathsf{RL}_\trianglelefteq$, de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash x \trianglelefteq x' \wedge y \trianglelefteq y' \wedge z \trianglelefteq z' \to \Sigma xyz \trianglelefteq \Sigma x'y'z'$, que pelo corolário 145 equivale a $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash x \trianglelefteq x' \wedge y \trianglelefteq y' \wedge z \trianglelefteq z' \to xz(yz) \trianglelefteq x'z'(y'z')$, o que provamos usando M_2.

$\underline{R_{\underline{\rho}}}$ Vamos só esboçar a demonstração de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash R_i \trianglelefteq (R_i)^M$. Primeiro demonstramos $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \underline{y} \trianglelefteq \underline{y'} \wedge \underline{z} \trianglelefteq \underline{z'} \to \forall x^0[R_i x \underline{y}\,\underline{z} \trianglelefteq R_i x \underline{y'}\,\underline{z'}]$ supondo o antecedente e provando o consequente por indução em x. Feito isto, pela generalização de $\mathsf{RL}_\trianglelefteq$ concluímos $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \forall x^0(R_i x \trianglelefteq R_i x)$. Daqui vem $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash R_i \trianglelefteq (R_i)^M$ pelo lema 151.

Provemos agora o resultado para termos fechados por indução nos termos fechado. O caso base são as constantes, caso este que já foi visto. Para o passo de indução, consideramos um termo fechado $t_1 t_2$ onde t_1 e t_2 são termos fechados. Por hipótese de indução, existem termos fechados q_1 e q_2 tais que $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash t_1 \trianglelefteq q_1$ e $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash t_1 \trianglelefteq q_2$. Por M_2 vem $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash t_1 t_2 \trianglelefteq q_1 q_2$.

Finalmente, vejamos o resultado para termos arbitrários. Seja t^{ρ} um qualquer termo com variáveis $\underline{x}^{\underline{\sigma}}$. Então $\lambda \underline{x} \,.\, t$ é um termo fechado de tipo $\rho\underline{\sigma}^t$, logo pelo resultado para termos fechados já provado, existe um termo $q^{\rho\underline{\sigma}^t}$ tal que $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash \lambda \underline{x} \,.\, t \trianglelefteq_{\rho\underline{\sigma}^t} q$. Daqui é fácil ver que o termo $q\underline{x}$ é um majorante de t: temos $\underline{x} \trianglelefteq \underline{x}' \to (\lambda \underline{x} \,.\, t)\underline{x} \trianglelefteq q\underline{x}'$, isto é, $\underline{x} \trianglelefteq \underline{x}' \to (\lambda \underline{x} \,.\, t)\underline{x} \trianglelefteq [\lambda \underline{x} \,.\, (q\underline{x})]\underline{x}'$, donde pela generalização de $\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}$ concluímos $\lambda \underline{x} \,.\, t \trianglelefteq \lambda \underline{x} \,.\, (q\underline{x})$. □

7.5 Princípios

No capítulo 11 vamos precisar de alguma lógica clássica, mas não de toda: basta-nos a lei do terceiro excluído para fórmulas limitadas. Apresentamo-la já aqui.

Definição 153. Chamamos *lei do terceiro excluído para fórmulas limitadas* a

$$\mathsf{B\text{-}LEM}: \quad A_l \vee \neg A_l,$$

onde A_l é uma fórmula limitada de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$.

O axioma da escolha limitado é semelhante ao já conhecido axioma da escolha AC, mas com a diferença de nos dar não y em função de x mas um "majorante" de y em função de um "majorante" de x.

Definição 154. Chamamos *axioma da escolha limitado* a

$$\mathsf{bAC}: \quad \forall x^{\rho} \exists y^{\tau} A \to \tilde{\exists} Y^{\tau\rho} \tilde{\forall} z^{\rho} \forall x \trianglelefteq z \exists y \trianglelefteq Yz A,$$

(bAC vem do inglês *bounded axiom of choice*) onde A é uma fórmula arbitrária de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$.

Definição 155. Chamamos *axioma da escolha limitado para fórmulas limitadas* a

$$\mathsf{B\text{-}bAC}: \quad \forall x^{\rho} \exists y^{\tau} A_l \to \tilde{\exists} Y^{\tau\rho} \tilde{\forall} z^{\rho} \forall x \trianglelefteq z \exists y \trianglelefteq Yz A_l,$$

($\mathsf{B\text{-}bAC}$ vem do inglês *bounded axiom of choice for bounded formulas*) onde A_l é uma fórmula limitada de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$.

O princípio da independência das premissas limitado lembra o anterior princípio da independência das premissas IP, mas com a diferença de em vez de nos dar y independentemente da premissa, dá-nos um "majorante" de y.

Definição 156. Chamamos *princípio da independência das premissas limitado* a

$$\mathsf{bIP}: \quad (\forall \underline{x} A_l \to \exists y B) \to \tilde{\exists} z(\forall \underline{x} A_l \to \exists y \trianglelefteq z B),$$

(bIP vem do inglês *bounded independence of premises*) onde A_l é uma fórmula limitada de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$ e B é uma fórmula arbitrária de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$.

O princípio de Markov limitado que enunciamos de seguida manifestamente não se parece com o já conhecido princípio de Markov M. No entanto, na proposição 161 vamos obter uma versão de aspecto mais familiar.

Definição 157. Chamamos *princípio de Markov limitado* a

$$\mathsf{bM}: \quad (\forall y \forall \underline{x} A_l \to B_l) \to \tilde{\exists} z(\forall y \trianglelefteq z \forall \underline{x} A_l \to B_l),$$

(bM vem do inglês *bounded Markov's principle*) onde A_l e B_l são fórmulas limitadas de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$.

Podemos intuitivamente pensar no princípio da disjunção universal limitado que se segue da seguinte forma: se em $\tilde{\forall} \underline{x}', \underline{y}'(\forall \underline{x} \trianglelefteq \underline{x}' A_l \vee \forall \underline{y} \trianglelefteq \underline{y}' B_l)$ tomarmos $\underline{x}', \underline{y}' \to \infty$, então obtemos $\forall \underline{x} A_l \vee \forall \underline{y} B_l$.

Definição 158. Chamamos *princípio da disjunção universal limitado* a

$$\mathsf{bUD}: \quad \tilde{\forall} \underline{x}', \underline{y}'(\forall \underline{x} \trianglelefteq \underline{x}' A_l \vee \forall \underline{y} \trianglelefteq \underline{y}' B_l) \to \forall \underline{x} A_l \vee \forall \underline{y} B_l,$$

(bUD vem do inglês *bounded universal disjunction principle*) onde A_l e B_l são fórmulas limitadas de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$.

Informalmente, o princípio da contra-colecção limitado que se segue diz-nos que se $\tilde{\forall} \underline{z} \exists y \trianglelefteq w \forall \underline{x} \trianglelefteq \underline{z} A_l$, isto é, existe um y que funciona quando os $\underline{x}$ estão limitados, então $\exists y \trianglelefteq w \forall \underline{x} A_l$, isto é, existe um y que funciona sem essa limitação.

Definição 159. Chamamos *princípio da contra-colecção limitado* a

$$\mathsf{bCC}: \quad \tilde{\forall} w(\tilde{\forall} \underline{z} \exists y \trianglelefteq w \forall \underline{x} \trianglelefteq \underline{z} A_l \to \exists y \trianglelefteq w \forall \underline{x} A_l),$$

(bCC vem do inglês *bounded contra collection principle*) onde A_l é uma fórmula limitada de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$.

Já mencionámos que $\trianglelefteq$ não é reflexiva, nem sequer vale a propriedade mais fraca $\forall x \exists y(x \trianglelefteq_\rho y)$. Esta propriedade $\forall x \exists y(x \trianglelefteq_\rho y)$ é fundamental para, por exemplo, provar $\forall x \forall y \trianglelefteq x A \leftrightarrow \forall y A$ e $\exists x \exists y \trianglelefteq x A \leftrightarrow \exists y A$ (com $x \notin FV(A)$ em ambas as fórmulas). Daí ser um princípio lógico que vamos considerar.

Definição 160. Chamamos *axioma da majoração* a

$$\mathsf{MAJ}: \quad \forall x^\rho \exists y^\rho (x \trianglelefteq_\rho y).$$

Como prometido, vamos obter uma forma mais familiar do princípio de Markov.

Proposição 161. *Seja A_l uma fórmula limitada de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$. Temos*

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{bM} \vdash \neg\neg\exists \underline{y} A_l \to \tilde{\exists} \underline{z} \neg\neg\exists \underline{y} \trianglelefteq \underline{z} A_l.$$

Demonstração. Aplicando sucessivamente bM podemos generalizar bM a uplos, isto é, podemos derivar

$$(\forall \underline{y} A_l \to B_l) \to \tilde{\exists} \underline{z} (\forall \underline{y} \trianglelefteq \underline{z} A_l \to B_l), \tag{7.4}$$

onde A_l e B_l são fórmulas limitadas de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$. Pondo $B_l \equiv \bot$ e $\neg A_l$ em vez de A_l em (7.4) obtemos $(\forall \underline{y} \neg A_l \to \bot) \to \tilde{\exists} \underline{z} (\forall \underline{y} \trianglelefteq \underline{z} \neg A_l \to \bot)$, isto é,

$$\neg \forall \underline{y} \neg A_l \to \tilde{\exists} \underline{z} \neg \forall \underline{y} \trianglelefteq \underline{z} \neg A_l. \tag{7.5}$$

Usando $\neg\exists x C \leftrightarrow \forall x \neg C$ (que vale intuicionisticamente), vemos que o antecedente de (7.5) equivale a $\neg\neg\exists \underline{y} A_l$. Vejamos que o consequente equivale a $\tilde{\exists} \underline{z} \neg\neg\exists \underline{y} \trianglelefteq \underline{z} A_l$:

$$\begin{aligned} \mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash \neg \forall \underline{y} \trianglelefteq \underline{z} \neg A_l &\leftrightarrow \neg \forall \underline{y} (\underline{y} \trianglelefteq \underline{z} \to \neg A_l) \\ &\leftrightarrow \neg \forall \underline{y} \neg (\underline{y} \trianglelefteq \underline{z} \wedge A_l) \\ &\leftrightarrow \neg\neg\exists \underline{y} (\underline{y} \trianglelefteq \underline{z} \wedge A_l) \\ &\leftrightarrow \neg\neg\exists \underline{y} \trianglelefteq \underline{z} A_l. \quad \square \end{aligned}$$

Na proposição seguinte, a condição $\tilde{\forall} x \tilde{\forall} y \tilde{\forall} \tilde{y} \trianglelefteq y [A(x, \tilde{y}) \to A(x, y)]$ significa que $A(x, y)$ é monótona em y. Portanto, a proposição diz-nos que se $A(x, y)$ for monótona em y, então temos um resultado semelhante a AC mas com quantificações monótonas.

Proposição 162. *Para cada fórmula A de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$, temos*

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{bIP} + \mathsf{bAC} \vdash$$
$$\tilde{\forall} x \tilde{\forall} y \tilde{\forall} \tilde{y} \trianglelefteq y [A(x, \tilde{y}) \to A(x, y)] \wedge \tilde{\forall} x \tilde{\exists} y A(x, y) \to \tilde{\exists} Y \tilde{\forall} x A(x, Yx).$$

Demonstração. Suponhamos o antecedente da fórmula do enunciado. Por $\mathsf{B}_{\forall}$ e $\mathsf{B}_{\exists}$, temos $\forall x \big[x \trianglelefteq x \to \exists y \big(y \trianglelefteq y \wedge A(x, y) \big) \big]$. Por bIP vem $\forall x \tilde{\exists} y \big[x \trianglelefteq x \to \exists \tilde{y} \trianglelefteq y \big(\tilde{y} \trianglelefteq \tilde{y} \wedge A(x, \tilde{y}) \big) \big]$. Pelo membro esquerdo da conjunção do enunciado, vem $\forall x \tilde{\exists} y [x \trianglelefteq x \to A(x, y)]$. Por bAC vem $\tilde{\exists} Y \tilde{\forall} z \forall x \trianglelefteq z \exists y \trianglelefteq Yz [x \trianglelefteq x \to A(x, y)]$. Novamente pelo membro esquerdo da conjunção do enunciado vem $\tilde{\exists} Y \tilde{\forall} z \forall x \trianglelefteq z [x \trianglelefteq x \to A(x, Yz)]$. Pondo $x = z$ vem o resultado pretendido. $\square$

Vamos agora expor uma técnica para generalizar para uplos princípios enunciados para uma só variável. Por exemplo, para generalizar $\forall x \exists y A(x, y) \to \exists Y \forall x A(x, Yx)$ obtendo $\forall \underline{x} \exists \underline{y} A(\underline{x}, \underline{y}) \to \exists \underline{Y} \forall \underline{x} A(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x})$. Trata-se de uma técnica que nos permite codificar uplos de termos $t_1^{\rho_1}, \ldots, t_n^{\rho_n}$ num único termo $c^{(n)} t_1 \cdots t_n$ (c de codificação) e depois descodificar por meios de termos descodificadores $p_i^{(n)}$ (p de projecção) que informalmente verificam $p_i^{(n)}(ct_1 \cdots t_n) = t_i$. A forma mais natural de encarar estes termos é pensar em $c^{(n)} t_1 \cdots t_n$ como sendo o uplo $(t_1, \ldots, t_n)$ e em $p_i^{(n)}$ como sendo a projecção $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$.

Teorema 163 (codificação de uplos de termos)**.** *Sejam* $\underline{\rho} = \rho_1, \ldots, \rho_n$ *um uplo de tipos e* $n \geq 1$*. Existem termos fechados e monótonos* $c^{(n)}$ *e* $\underline{p}^{(n)} = p_1^{(n)}, \ldots, p_n^{(n)}$ *de* $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$ *(de tipos apropriados) tais que para todos os termos* $\underline{t}^{\underline{\rho}}$ *de* $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$ *e para toda a fórmula* $A(\underline{x}^{\underline{\rho}})$ *temos* $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash A(\underline{t}) \leftrightarrow A\big(\underline{p}^{(n)}(c^{(n)}\underline{t})\big)$.

Demonstração. Em [Troelstra 1973], secção 1.3.9 e secções de 1.8.5 a 1.8.8, está demonstrado que existem termos $c^{(n)}$ e $\underline{p}^{(n)}$ nas condições do enunciado, exceptuando a condição de serem monótonos. Alterando ligeiramente essa demonstração, considerando os termos monótonos

$$j \equiv \lambda x, y, z \,.\, (zxy), \qquad j_1 \equiv \lambda w \,.\, (w\Pi), \qquad j_2 \equiv \lambda w \,.\, (w\Pi^*), \qquad (\Pi^* :\equiv \lambda u, v \,.\, v),$$

em vez dos termos j e j_1, j_2 que podemos encontramos em [Troelstra 1973], obtemos outros termos $c^{(n)}$ e $\underline{p}^{(n)}$ que já são monótonos. $\square$

Exemplo 164. Vamos aplicar o teorema 163 para generalizar

$$\mathsf{B\text{-}bAC}: \quad \forall x \exists y A_l(x, y) \to \tilde{\exists} Y \tilde{\forall} z \forall x \trianglelefteq z \exists y \trianglelefteq Yz A_l(x, y),$$

a uplos, obtendo

$$\forall \underline{x} \exists \underline{y} A_l(\underline{x}, \underline{y}) \to \tilde{\exists} \underline{Y} \tilde{\forall} \underline{z} \forall \underline{x} \trianglelefteq \underline{z} \exists \underline{y} \trianglelefteq \underline{Y}\, \underline{z} A_l(\underline{x}, \underline{y}), \tag{7.6}$$

onde $\underline{x} = x_1, \ldots, x_m$ e $\underline{y} = y_1, \ldots, y_n$. Fazemos a generalização em três passos: (i) passamos de uplos para variáveis simples, (ii) aplicamos $\mathsf{B\text{-}bAC}$ num contexto com variáveis simples e (iii) regressamos aos uplos.

1. Suponhamos o antecedente de (7.6). Definamos $A'_l(x, y) :\equiv A_l(\underline{p}^{(m)}x, \underline{p}^{(n)}y)$. Notemos que $A'_l(x, y)$ ainda é uma fórmula limitada. Com vista a aplicar $\mathsf{B\text{-}bAC}$ a $A'_l(x, y)$, vamos provar $\forall x \exists y A'_l(x, y)$. Seja x qualquer. Pondo $\underline{x} = \underline{p}^{(m)}x$ no antecedente de (7.6) vem $\exists \underline{y} A_l(\underline{p}^{(m)}x, \underline{y})$. Portanto, tomando $y = c^{(n)}\underline{y}$ concluímos $A'_l(x, y)$. Fica provado $\forall x \exists y A'_l(x, y)$.

2. Como temos $\forall x \exists y A'_l(x, y)$, então aplicando $\mathsf{B\text{-}bAC}$ à fórmula limitada $A'_l(x, y)$ vem

$$\tilde{\exists} Y \tilde{\forall} z \forall x \trianglelefteq z \exists y \trianglelefteq Yz A'_l(x, y). \tag{7.7}$$

3. A partir de (7.7) vamos provar o consequente de (7.6). Tomemos $\underline{Y} = \lambda \underline{z} . \underline{p}^{(n)}[Y(c^{(m)}\underline{z})]$. Notemos que temos $\underline{Y} \trianglelefteq \underline{Y}$ porque $Y \trianglelefteq Y$ e $\underline{p}^{(n)}$ e $c^{(m)}$ são monótonos. Sejam $\underline{z}$ e $\underline{x}$ quaisquer tais que $\underline{z} \trianglelefteq \underline{z}$ e $\underline{x} \trianglelefteq \underline{z}$. Ponhamos $z = c^{(m)}\underline{z}$ e $x = c^{(m)}\underline{x}$ em (7.7). Notemos que o podemos fazer porque estes z e x verificam $z \trianglelefteq z$ e $x \trianglelefteq z$ devido a $\underline{z} \trianglelefteq \underline{z}$, $\underline{x} \trianglelefteq \underline{z}$ e a $c^{(m)}$ ser monótono. Vem $\exists y \trianglelefteq Y(c^{(m)}\underline{z}) A'_l(c^{(m)}\underline{x}, y)$, isto é, $\exists y \trianglelefteq Y(c^{(m)}\underline{z}) A_l(\underline{x}, \underline{p}^{(n)}y)$. Agora para obtermos o consequente de (7.6) basta tomarmos $\underline{y} = \underline{p}^{(n)}y$ e observarmos que $\underline{y} \trianglelefteq \underline{Y}\underline{z}$, isto é, $\underline{p}^{(n)}y \trianglelefteq \underline{p}^{(n)}[Y(c^{(m)}\underline{z})]$, porque $y \trianglelefteq Y(c^{(m)}\underline{z})$ e os $\underline{p}^{(n)}$ são monótonos.

Capítulo 8

Interpretação funcional limitada

Vamos motivar a interpretação funcional limitada seguindo de perto a motivação de [Ferreira e Oliva 2005], secção 1. Ulrich Kohlenbach tem defendido a procura de interpretações funcionais que em vez de extraírem testemunhas exactas para as sentenças existenciais (isto é, caso se derive $\exists x A(x)$, extraírem termos t tais que se derive $A(t)$), extraiam majorantes (isto é, caso se derive $\exists x A(x)$, extraiam termos t tais que se derive $\exists x \trianglelefteq t A(x)$).

Uma das vantagens de concentrar-nos em majorantes em vez de testemunhas exactas é por vezes conseguirmos extrair informação de sentenças que afirmam existirem objectos não computáveis (e que portanto não podem ser dados por termos t), mas para os quais existem majorantes computáveis.

Outra vantagem é diminuir o número de dependências dos termos. Por exemplo, uma testemunha exacta de $\forall x \forall y \trianglelefteq x \exists z A(x, y, z)$ é um termo t tal que $\forall x \forall y \trianglelefteq x A(x, y, txy)$ (t fica dependente de x e y), enquanto um majorante para z poderá ser um termo t tal que $\forall x \forall y \trianglelefteq x \exists z \trianglelefteq tx A(x, y, z)$ (como t é um majorante, não precisa de depender de y, basta depender do majorante x de y).

Neste capítulo estudamos a interpretação funcional limitada de Fernando Ferreira e Paulo Oliva ([Ferreira e Oliva 2005]), uma interpretação funcional vocacionada para a extracção de majorantes num contexto intuicionista. Esta interpretação funcional B está para $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ como D está para HA^ω_0.

$$\mathsf{HA}^\omega_0 \xrightarrow{D} \mathsf{HA}^\omega_0$$

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \xrightarrow[B]{} \mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$$

Definição 165. Para cada fórmula A de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$, definimos as fórmulas A^B e A_B de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ (B do inglês *bounded*), a primeira delas chamada *interpretação funcional limitada* de A, por indução na complexidade das fórmulas.

1. Se A é fórmula atómica, então $A^B :\equiv \tilde{\exists} \underline{x} \tilde{\forall} \underline{y} A_B(\underline{x}, \underline{y}) :\equiv A$ onde $\underline{x}$ e $\underline{y}$ são uplos vazios.

Suponhamos que já definimos $A^B \equiv \tilde{\exists}\underline{x}\tilde{\forall}\underline{y}A_B(\underline{x},\underline{y})$ e $B^B \equiv \tilde{\exists}\underline{x'}\tilde{\forall}\underline{y'}B_B(\underline{x'},\underline{y'})$. Então:

2. $(A \wedge B)^B :\equiv \tilde{\exists}\underline{x},\underline{x'}\tilde{\forall}\underline{y},\underline{y'}(A \wedge B)_B(\underline{x},\underline{x'},\underline{y},\underline{y'}) :\equiv \tilde{\exists}\underline{x},\underline{x'}\tilde{\forall}\underline{y},\underline{y'}[A_B(\underline{x},\underline{y}) \wedge B_B(\underline{x'},\underline{y'})]$;

3. $(A \vee B)^B :\equiv \tilde{\exists}\underline{x},\underline{x'}\tilde{\forall}\underline{y},\underline{y'}(A \vee B)_B(\underline{x},\underline{x'},\underline{y},\underline{y'}) :\equiv$
$\tilde{\exists}\underline{x},\underline{x'}\tilde{\forall}\underline{y},\underline{y'}[\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y}A_B(\underline{x},\underline{\tilde{y}}) \vee \tilde{\forall}\underline{\tilde{y}'} \trianglelefteq \underline{y'}B_B(\underline{x'},\underline{\tilde{y}'})]$;

4. $(A \to B)^B :\equiv \tilde{\exists}\underline{X'},\underline{Y}\tilde{\forall}\underline{x},\underline{y'}(A \to B)_B(\underline{X'},\underline{Y},\underline{x},\underline{y'}) :\equiv$
$\tilde{\exists}\underline{X'},\underline{Y}\tilde{\forall}\underline{x},\underline{y'}[\tilde{\forall}\underline{y} \trianglelefteq \underline{Y}\,\underline{x}\underline{y'}A_B(\underline{x},\underline{y}) \to B_B(\underline{X'}\,\underline{x},\underline{y'})]$;

5. $(\forall z \trianglelefteq tA)^B :\equiv \tilde{\exists}\underline{x}\tilde{\forall}\underline{y}(\forall z \trianglelefteq tA)_B(\underline{x},\underline{y}) :\equiv \tilde{\exists}\underline{x}\tilde{\forall}\underline{y}\forall z \trianglelefteq tA_B(\underline{x},\underline{y})$.

6. $(\exists z \trianglelefteq tA)^B :\equiv \tilde{\exists}\underline{x}\tilde{\forall}\underline{y}(\exists z \trianglelefteq tA)_B(\underline{x},\underline{y}) :\equiv \tilde{\exists}\underline{x}\tilde{\forall}\underline{y}\exists z \trianglelefteq t\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y}A_B(\underline{x},\underline{\tilde{y}})$.

7. $(\forall zA)^B :\equiv \tilde{\exists}\underline{X}\tilde{\forall}w,\underline{y}(\forall zA)_B(\underline{X},w,\underline{y}) :\equiv \tilde{\exists}\underline{X}\tilde{\forall}w,\underline{y}\forall z \trianglelefteq wA_B(\underline{X}w,\underline{y})$;

8. $(\exists zA)^B :\equiv \tilde{\exists}w,\underline{x}\tilde{\forall}\underline{y}(\exists zA)_B(w,\underline{x},\underline{y}) :\equiv \tilde{\exists}w,\underline{x}\tilde{\forall}\underline{y}\exists z \trianglelefteq w\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y}A_B(\underline{x},\underline{\tilde{y}})$.

Numa interpretação $A^B \equiv \tilde{\exists}\underline{x}\tilde{\forall}\underline{y}A_B(\underline{x},\underline{y})$, supomos que as variáveis $\underline{x},\underline{y}$ são distintas e não ocorrem livres em A.

Observação 166. Demonstramos facilmente por indução na complexidade das fórmulas que A_B é uma fórmula limitada e que se A_l é uma fórmula limitada de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$, então $(A_l)^B \equiv (A_l)_B \equiv A_l$.

De seguida calculamos a B-tradução para o símbolo lógico definido $\neg$.

Proposição 167. *Se $A^B \equiv \tilde{\exists}\underline{x}\tilde{\forall}\underline{y}A_B(\underline{x},\underline{y})$, então $(\neg A)^B \equiv \tilde{\exists}\underline{Y}\tilde{\forall}\underline{x}\neg\tilde{\forall}\underline{y} \trianglelefteq \underline{Y}\,\underline{x}A_B(\underline{x},\underline{y})$.*

Demonstração. Trata-se apenas de uma questão de contas. □

As matrizes $A_B(\underline{x},\underline{y})$ são monótonas em $\underline{x}$, isto é, se $A_B(\underline{x},\underline{y})$ vale para $\underline{x}$, então vale para um $\underline{\hat{x}}$ tal que $\underline{x} \trianglelefteq \underline{\hat{x}}$. Provamos este facto de seguida.

Lema 168 (da monotonia de B)**.** *Para toda a fórmula A de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$, temos*

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \underline{x} \trianglelefteq \underline{\hat{x}} \wedge \underline{y} \trianglelefteq \underline{y} \wedge A_B(\underline{x},\underline{y}) \to A_B(\underline{\hat{x}},\underline{y}).$$

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução na complexidade das fórmulas.

Fórmulas atómicas Este caso é trivial.

$\underline{A \wedge B}$ Este caso é fácil.

$\underline{A \vee B}$ Temos

$$(A \vee B)_B(\underline{x},\underline{x'},\underline{y},\underline{y'}) \equiv \tilde{\forall}\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y}A_B(\underline{x},\underline{\tilde{y}}) \vee \tilde{\forall}\underline{\tilde{y}'} \trianglelefteq \underline{y'}B_B(\underline{x'},\underline{\tilde{y}'}).$$

Suponhamos $\underline{x}, \underline{x'} \trianglelefteq \underline{\hat{x}}, \underline{\hat{x}'}$, $\underline{y}, \underline{y'} \trianglelefteq \underline{y}, \underline{y'}$ e $(A \vee B)_B(\underline{x}, \underline{x'}, \underline{y}, \underline{y'})$. Queremos provar

$$(A \vee B)_B(\underline{\hat{x}}, \underline{\hat{x}'}, \underline{y}, \underline{y'}) \equiv \tilde{\forall}\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y} A_B(\underline{\hat{x}}, \underline{\tilde{y}}) \vee \tilde{\forall}\underline{\tilde{y}'} \trianglelefteq \underline{y'} B_B(\underline{\hat{x}'}, \underline{\tilde{y}'}).$$

Se tivermos $\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y} A_B(\underline{x}, \underline{\tilde{y}})$, então pela observação 141 temos $\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}}[\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y} \to A_B(\underline{x}, \underline{\tilde{y}})]$. Como, por hipótese de indução, temos (na presença das hipóteses $\underline{x} \trianglelefteq \underline{\hat{x}}$ e $\underline{y} \trianglelefteq \underline{y}$) $A_B(\underline{x}, \underline{\tilde{y}}) \to A_B(\underline{\hat{x}}, \underline{\tilde{y}})$, então de $\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}}[\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y} \to A_B(\underline{x}, \underline{\tilde{y}})]$ vem $\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}}[\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y} \to A_B(\underline{\hat{x}}, \underline{\tilde{y}})]$, isto é, $\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y} A_B(\underline{\hat{x}}, \underline{\tilde{y}})$. Analogamente, de $\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}'} \trianglelefteq \underline{y'} B_B(\underline{x'}, \underline{\tilde{y}'})$ vem $\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}'} \trianglelefteq \underline{y'} B_B(\underline{\hat{x}'}, \underline{\tilde{y}'})$.

$\underline{A \to B}$ Temos

$$(A \to B)_B(\underline{X'}, \underline{Y}, \underline{x}, \underline{y'}) \equiv \tilde{\forall}\underline{y} \trianglelefteq \underline{Y}\,\underline{x}\,\underline{y'} A_B(\underline{x}, \underline{y}) \to B_B(\underline{X'}\,\underline{x}, \underline{y'}). \tag{8.1}$$

Suponhamos $\underline{X'}, \underline{Y} \trianglelefteq \underline{\hat{X}'}, \underline{\hat{Y}}$, $\underline{x}, \underline{y'} \trianglelefteq \underline{x}, \underline{y'}$ e $(A \to B)_B(\underline{X'}, \underline{Y}, \underline{x}, \underline{y})$. Queremos provar

$$(A \to B)_B(\underline{\hat{X}'}, \underline{\hat{Y}}, \underline{x}, \underline{y'}) \equiv \tilde{\forall}\underline{y} \trianglelefteq \underline{\hat{Y}}\,\underline{x}\,\underline{y'} A_B(\underline{x}, \underline{y}) \to B_B(\underline{\hat{X}'}\,\underline{x}, \underline{y'}). \tag{8.2}$$

Suponhamos o antecedente de (8.2). Como $\underline{Y} \trianglelefteq \underline{\hat{Y}}$, então por M_2 vem $\underline{Y}\,\underline{x}\underline{y'} \trianglelefteq \underline{\hat{Y}}\,\underline{x}\underline{y'}$. Portanto, do antecedente de (8.2) vem, pela transitividade de $\trianglelefteq$ (proposição 142), o antecedente de (8.1), logo temos o consequente de (8.1), donde por sua vez vem, por hipótese de indução e atendendo a $\underline{X'}\,\underline{x} \trianglelefteq \underline{\hat{X}'}\,\underline{x}$, o consequente de (8.2).

$\underline{\forall z \trianglelefteq tA}$ Este caso é fácil imitando alguns argumentos do caso $A \vee B$, mais precisamente a passagens de $\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y} A_B(\underline{x}, \underline{\tilde{y}})$ para $\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}}[\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y} \to A_B(\underline{x}, \underline{\tilde{y}})]$, depois para $\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}}[\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y} \to A_B(\underline{\hat{x}}, \underline{\tilde{y}})]$ e finalmente para $\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y} A_B(\underline{\hat{x}}, \underline{\tilde{y}})$.

$\underline{\exists z \trianglelefteq tA}$ Análogo ao caso anterior.

$\underline{\forall zA}$ Este caso também é fácil imitando os referidos argumentos do caso $A \vee B$ e tendo em conta que se $\underline{X} \trianglelefteq \underline{\hat{X}}$ e $w \trianglelefteq w$, então $\underline{X}w \trianglelefteq \underline{\hat{X}}w$.

$\underline{\exists zA}$ Temos

$$(\exists zA)_B(w, \underline{x}, \underline{y}) \equiv \exists z \trianglelefteq w \forall \underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y} A_B(\underline{x}, \underline{\tilde{y}}).$$

Suponhamos $w, \underline{x} \trianglelefteq \hat{w}, \underline{\hat{x}}$, $\underline{y} \trianglelefteq \underline{y}$ e $(\exists zA)_B(w, \underline{x}, \underline{y})$. Queremos provar

$$(\exists zA)_B(\hat{w}, \underline{\hat{x}}, \underline{y}) \equiv \exists z \trianglelefteq \hat{w} \forall \underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y} A_B(\underline{\hat{x}}, \underline{\tilde{y}}).$$

Por hipótese de indução, de $(\exists zA)_B(w, \underline{x}, \underline{y})$ vem $\exists z \trianglelefteq w \forall \underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y} A_B(\underline{\hat{x}}, \underline{\tilde{y}})$. Como $w \trianglelefteq \hat{w}$, segue-se $(\exists zA)_B(\hat{w}, \underline{\hat{x}}, \underline{y})$. □

Teorema 169 (da correcção de B)**.** *Sejam A uma fórmula arbitrária de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$, $\underline{l}$ todas as variáveis livres de A e $A^B \equiv \tilde{\exists}\underline{x}\tilde{\forall}\underline{y} A_B(\underline{x}, \underline{y})$. Se*

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{bAC} + \mathsf{bIP} + \mathsf{bM} + \mathsf{bUD} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ} \vdash A,$$

então existe um uplo de termos fechados monótonos $\underline{t}$ de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$, que pode ser calculado a partir de uma derivação de A, tal que $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}\forall \underline{l} \trianglelefteq \underline{a}\tilde{\forall}\underline{y} A_B(\underline{t}\,\underline{a}, \underline{y})$.

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução no comprimento das derivações, construindo explicitamente os termos $\underline{t}$. Vamos verificar apenas alguns axiomas e regras para dar a ideia da demonstração. A demonstração completa pode ser encontrada em [Ferreira e Oliva 2005], secções 3 e 5.

Quando conveniente, vamos denotar por $\underline{l}_A$ as variáveis de $FV(A)$, por $\underline{l}_{AB}$ as variáveis de $FV(A) \cup FV(B)$, por $\underline{l}_{A\setminus BC}$ as variáveis de $FV(A) \setminus [FV(B) \cup FV(C)]$ e por $\underline{l}_{AB\setminus(C\setminus DE)}$ as variáveis de $[FV(A) \cup FV(B)] \setminus \big[FV(C) \setminus \big(FV(D) \cup FV(E)\big)\big]$. Iremos também usar os índices A, AB, $A \setminus BC$ e $AB \setminus (C \setminus DE)$ para variáveis relacionadas com $\underline{l}_A, \underline{l}_{AB}, \underline{l}_{A\setminus BC}$ e $\underline{l}_{AB\setminus(C\setminus DE)}$. Por exemplo, se $\underline{l}_{AB} \trianglelefteq \underline{a}$, então podemos denotar $\underline{a}$ por $\underline{a}_{AB}$. Analogamente, se substituirmos $\underline{l}_{AB}$ por $\underline{\mathcal{O}}$, então podemos denotar $\underline{\mathcal{O}}$ por $\underline{\mathcal{O}}_{AB}$.

Vejamos que para provar o resultado para equivalências, basta provar para as implicações separadamente. Sejam A e B fórmulas de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$. Digamos que $A^B \equiv \tilde{\exists}\underline{x}\tilde{\forall}\underline{y}A_B(\underline{x}, \underline{y})$ e $B^B \equiv \tilde{\exists}\underline{x}'\tilde{\forall}\underline{y}'B_B(\underline{x}', \underline{y}')$. É fácil verificar que se $\underline{q}_{\underline{x}}$ e $\underline{q}_{\underline{x}'}$ forem termos fechados monótonos tais que

$$\begin{aligned} \mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \ &\vdash\ \tilde{\forall}\underline{a}_A \forall \underline{l}_A \trianglelefteq \underline{a}_A \tilde{\forall}\underline{y} A_B(\underline{q}_{\underline{x}}\underline{a}_A, \underline{y}), \\ \mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \ &\vdash\ \tilde{\forall}\underline{a}_B \forall \underline{l}_B \trianglelefteq \underline{a}_B \tilde{\forall}\underline{y}' A_B(\underline{q}_{\underline{x}'}\underline{a}_B, \underline{y}'), \end{aligned}$$

então os termos

$$\begin{aligned} \underline{t}_{\underline{x}} \ &:\equiv\ \lambda \underline{a}_{AB} \,.\, (\underline{q}_{\underline{x}}\underline{a}_A), \\ \underline{t}_{\underline{x}'} \ &:\equiv\ \lambda \underline{a}_{AB} \,.\, (\underline{q}_{\underline{x}'}\underline{a}_B), \end{aligned}$$

são fechados, monótonos e tais que

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}_{AB} \forall \underline{l}_{AB} \trianglelefteq \underline{a}_{AB} \tilde{\forall}\underline{y}, \underline{y}' (A \wedge B)_B(\underline{t}_{\underline{x}}\underline{a}_{AB}, \underline{t}_{\underline{x}'}\underline{a}_{AB}, \underline{y}, \underline{y}')$$

(em particular, se $A \equiv C \to D$ e $B \equiv D \to C$, então este resultado mostra que para garantir que há termos que funcionem para $C \leftrightarrow D$, basta garantir que os há para $C \to D$ e para $D \to C$).

$\underline{A \vee A \to A}$ Temos

$$\begin{gathered} (A \vee A \to A)^B \equiv \tilde{\exists}\underline{X}'', \underline{Y}, \underline{Y}'\tilde{\forall}\underline{x}, \underline{x}', \underline{y}'' \\ \big[\tilde{\forall}\underline{y}, \underline{y}' \trianglelefteq \underline{Y}\,\underline{x}\,\underline{x}'\underline{y}'', \underline{Y}'\underline{x}\,\underline{x}'\underline{y}'' \big(\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y} A_B(\underline{x}, \underline{\tilde{y}}) \vee \tilde{\forall}\underline{\tilde{y}}' \trianglelefteq \underline{y}' A_B(\underline{x}', \underline{\tilde{y}}')\big) \to \\ A_B(\underline{X}''\underline{x}\,\underline{x}', \underline{y}'')\big] \end{gathered}$$

Vejamos que os termos

$$\begin{aligned} \underline{t}_{\underline{X}''} \ &:\equiv\ \lambda \underline{a}, \underline{x}, \underline{x}' \,.\, \max(\underline{x}, \underline{x}'), \\ \underline{t}_{\underline{Y}} \ &:\equiv\ \lambda \underline{a}, \underline{x}, \underline{x}', \underline{y}'' \,.\, \underline{y}'', \\ \underline{t}_{\underline{Y}'} \ &:\equiv\ \lambda \underline{a}, \underline{x}, \underline{x}', \underline{y}'' \,.\, \underline{y}'', \end{aligned}$$

estão nas condições pretendidas, isto é, são fechados (óbvio), monótonos (verificamos usando a generalização de $\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}$ e atendendo a que max é monótono) e verificam

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}\forall\underline{l} \trianglelefteq \underline{a}\tilde{\forall}\underline{x}, \underline{x}', \underline{y}''\big[\tilde{\forall}\underline{y}, \underline{y}' \trianglelefteq \underline{t}_Y\underline{a}\,\underline{x}\,\underline{x}'\underline{y}'', \underline{t}_{Y'}\underline{a}\,\underline{x}\,\underline{x}'\underline{y}''$$
$$\big(\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y}A_B(\underline{x}, \underline{\tilde{y}}) \vee \tilde{\forall}\underline{\tilde{y}}' \trianglelefteq \underline{y}'A_B(\underline{x}', \underline{\tilde{y}}')\big) \to A_B(\underline{t}_{X''}\underline{a}\,\underline{x}\,\underline{x}', \underline{y}'')\big],$$

o que com estes termos equivale a

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}\forall\underline{l} \trianglelefteq \underline{a}\tilde{\forall}\underline{x}, \underline{x}', \underline{y}''\big[\tilde{\forall}\underline{y}, \underline{y}' \trianglelefteq \underline{y}'', \underline{y}''$$
$$\big(\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y}A_B(\underline{x}, \underline{\tilde{y}}) \vee \tilde{\forall}\underline{\tilde{y}}' \trianglelefteq \underline{y}'A_B(\underline{x}', \underline{\tilde{y}}')\big) \to A_B\big(\max(\underline{x}, \underline{x}'), \underline{y}''\big)\big].$$

Isto é fácil de provar usando o lema da monotonia de B e o lema 149.

$\underline{A \to B, B \to C \;\Rightarrow\; A \to C}$ Temos

$$\begin{aligned}
(A \to B)^B &\equiv \tilde{\exists}\underline{X}', \underline{Y}\tilde{\forall}\underline{x}, \underline{y}'[\tilde{\forall}\underline{y} \trianglelefteq \underline{Y}\,\underline{x}\,\underline{y}'A_B(\underline{x}, \underline{y}) \to B_B(\underline{X}'\underline{x}, \underline{y}', \underline{l}_{B\backslash AC})],\\
(B \to C)^B &\equiv \tilde{\exists}\underline{X}'', \underline{Y}'\tilde{\forall}\underline{x}', \underline{y}''[\tilde{\forall}\underline{y}' \trianglelefteq \underline{Y}'\underline{x}'\underline{y}''B_B(\underline{x}', \underline{y}', \underline{l}_{B\backslash AC}) \to C_B(\underline{X}''\underline{x}', \underline{y}'')],\\
(A \to C)^B &\equiv \tilde{\exists}\underline{X}'', \underline{Y}\tilde{\forall}\underline{x}, \underline{y}''[\tilde{\forall}\underline{y} \trianglelefteq \underline{Y}\,\underline{x}\,\underline{y}''A_B(\underline{x}, \underline{y}) \to C_B(\underline{X}''\underline{x}, \underline{y}'')],
\end{aligned}$$

Por hipótese de indução, existem termos fechados monótonos $\underline{q}_{X'}, \underline{q}_Y$ e $\underline{r}_{X''}, \underline{r}_{Y'}$ tais que

$$\begin{aligned}
\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} &\vdash \tilde{\forall}\underline{a}_{AB}\forall\underline{l}_{AB} \trianglelefteq \underline{a}_{AB}\tilde{\forall}\underline{x}, \underline{y}'\\
&\quad[\tilde{\forall}\underline{y} \trianglelefteq \underline{q}_Y\underline{a}_{AB}\underline{x}\,\underline{y}'A_B(\underline{x}, \underline{y}) \to B_B(\underline{q}_{X'}\underline{a}_{AB}\underline{x}, \underline{y}', \underline{l}_{B\backslash AC})], \qquad (8.3)\\
\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} &\vdash \tilde{\forall}\underline{a}_{BC}\forall\underline{l}_{BC} \trianglelefteq \underline{a}_{BC}\tilde{\forall}\underline{x}', \underline{y}''\\
&\quad[\tilde{\forall}\underline{y}' \trianglelefteq \underline{r}_{Y'}\underline{a}_{BC}\underline{x}'\underline{y}''B_B(\underline{x}', \underline{y}', \underline{l}_{B\backslash AC}) \to C_B(\underline{r}_{X''}\underline{a}_{BC}\underline{x}', \underline{y}'')]. \qquad (8.4)
\end{aligned}$$

Para simplificar a notação, no resto desta alínea onde aparecer

$$\underline{q}_{X'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}, \qquad \underline{q}_Y\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}, \qquad \underline{r}_{X''}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}, \qquad \underline{r}_{Y'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a},$$

devemos entender, respectivamente,

$$\underline{q}_{X'}\underline{\mathcal{O}}_{B\backslash AC}\underline{a}_{AB\backslash(B\backslash AC)}, \; \underline{q}_Y\underline{\mathcal{O}}_{B\backslash AC}\underline{a}_{AB\backslash(B\backslash AC)}, \; \underline{r}_{X''}\underline{\mathcal{O}}_{B\backslash AC}\underline{a}_{BC\backslash(B\backslash AC)}, \; \underline{r}_{Y'}\underline{\mathcal{O}}_{B\backslash AC}\underline{a}_{BC\backslash(B\backslash AC)},$$

isto é, em $\underline{q}_{X'}\underline{a}_{AB}$, $\underline{q}_Y\underline{a}_{AB}$, $\underline{r}_{X''}\underline{a}_{BC}$ e $\underline{r}_{Y'}\underline{a}_{BC}$ estamos a substituir os $\underline{a}_{B\backslash AC}$ (que supomos serem as primeiras variáveis dos uplos $\underline{a}_{AB}$ e $\underline{a}_{BC}$) por $\underline{\mathcal{O}}_{B\backslash AC}$ e a não alterar as restantes variáveis desses uplos. Vejamos que os termos

$$\begin{aligned}
\underline{t}_{X''} &:\equiv \lambda\underline{a}_{AC}, \underline{x}\,.\,[\underline{r}_{X''}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}\,\underline{x}(\underline{q}_{X'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}\,\underline{x})],\\
\underline{t}_Y &:\equiv \lambda\underline{a}_{AC}, \underline{x}, \underline{y}''\,.\,\big[\underline{q}_Y\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}\,\underline{x}\big(\underline{r}_{Y'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}(\underline{q}_{X'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}\,\underline{x})\underline{y}''\big)\big],
\end{aligned}$$

estão nas condições pretendidas, isto é, são fechados (óbvio), monótonos (verificamos usando a generalização de $\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}$ e atendendo à monotonia de $\underline{q}_{X'}, \underline{q}_Y, \underline{r}_{X''}, \underline{r}_{Y'}$ e $\underline{\mathcal{O}}$) e verificam

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}_{AC}\forall\underline{l}_{AC} \trianglelefteq \underline{a}_{AC}\tilde{\forall}\underline{x}, \underline{y}''[\tilde{\forall}\underline{y} \trianglelefteq \underline{t}_Y\underline{a}_{AC}\underline{x}\,\underline{y}''A_B(\underline{x}, \underline{y}) \to C_B(\underline{t}_{X''}\underline{a}_{AC}\underline{x}, \underline{y}'')],$$

o que com estes termos é equivalente a

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}_{AC}\forall \underline{l}_{AC} \trianglelefteq \underline{a}_{AC}\tilde{\forall}\underline{x}, \underline{y}'' \tag{8.5}$$
$$\big[\tilde{\forall}\underline{y} \trianglelefteq \underline{q}_{\underline{Y}}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}\,\underline{x}\big(\underline{r}_{\underline{Y}'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}(\underline{q}_{\underline{X}'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}\,\underline{x})\underline{y}''\big)A_B(\underline{x}, \underline{y}) \to C_B\big(\underline{r}_{\underline{X}''}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}\,\underline{x}(\underline{q}_{\underline{X}'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}\,\underline{x}), \underline{y}''\big)\big].$$

Suponhamos $\underline{a}_{AC} \trianglelefteq \underline{a}_{AC}$, $\underline{l}_{AC} \trianglelefteq \underline{a}_{AC}$, $\underline{x}, \underline{y}'' \trianglelefteq \underline{x}, \underline{y}''$ e o antecedente de (8.5). Daqui, pondo $\underline{a}_{B\backslash AC} = \underline{l}_{B\backslash AC} = \underline{\mathcal{O}}_{B\backslash AC}$ e $\underline{y}' = \underline{r}_{\underline{Y}'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}(\underline{q}_{\underline{X}'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}\,\underline{x})\underline{y}''$ em (8.3) vem

$$B_B\big(\underline{q}_{\underline{X}'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}\,\underline{x}, \underline{r}_{\underline{Y}'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}(\underline{q}_{\underline{X}'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}\,\underline{x})\underline{y}'', \underline{\mathcal{O}}_{B\backslash AC}\big).$$

Daqui, pondo $\underline{a}_{B\backslash AC} = \underline{l}_{B\backslash AC} = \underline{\mathcal{O}}_{B\backslash AC}$ e $\underline{x}' = \underline{q}_{\underline{X}'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}\,\underline{x}$ em (8.4) vem o consequente de (8.5).

$\underline{\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}}$ A premissa $A_l \wedge u \trianglelefteq v \to tu \trianglelefteq qv \wedge qu \trianglelefteq qv$ e a conclusão $A_l \to t \trianglelefteq q$ de $\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}$ são fórmulas limitadas, pelo que coincidem com as suas B-traduções. Sejam $\underline{l}$ as variáveis de $FV(A_l) \cup FV(t) \cup FV(q)$. Por hipótese de indução, temos

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}, b, c\forall \underline{l}, u, v \trianglelefteq \underline{a}, b, c(A_l \wedge u \trianglelefteq v \to tu \trianglelefteq qv \wedge qu \trianglelefteq qv),$$

onde $\underline{l}, u, v$ são as variáveis livres da premissa de $\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}$. "Desfazendo" as quantificações da forma $\tilde{\forall}zB$ para a forma $\forall z(z \trianglelefteq z \to B)$ e as quantificações da forma $\forall z \trianglelefteq rB$ para a forma $\forall z(z \trianglelefteq r \to B)$ (usando $\mathsf{B}_\forall$), obtemos

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \forall \underline{a}, b, c\forall \underline{l}, u, v \tag{8.6}$$
$$(\underline{a}, b, c \trianglelefteq \underline{a}, b, c \wedge \underline{l}, u, v \trianglelefteq \underline{a}, b, c \wedge A_l \wedge u \trianglelefteq v \to tu \trianglelefteq qv \wedge qu \trianglelefteq qv).$$

Por aplicação de $\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}$ à matriz de (8.6) vem

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \forall \underline{a}, b, c\forall \underline{l}, u, v(\underline{a}, b, c \trianglelefteq \underline{a}, b, c \wedge \underline{l}, u, v \trianglelefteq \underline{a}, b, c \wedge A_l \to t \trianglelefteq q).$$

"Refazendo" as quantificações que "desfizemos", vem

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}, b, c\forall \underline{l}, u, v \trianglelefteq \underline{a}, b, c(A_l \to t \trianglelefteq q).$$

Daqui, atendendo a que $u, v \notin FV(A_l \to t \trianglelefteq q)$, eliminando as quantificações inertes $\tilde{\forall}b, c$ e $\forall u, v \trianglelefteq b, c$ vem o resultado pretendido:

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}\forall \underline{l} \trianglelefteq \underline{a}(A_l \to t \trianglelefteq q),$$

onde $\underline{l}$ são as variáveis livres da conclusão de $\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}$.

$\underline{\mathsf{M}_1}$ A fórmula $x \trianglelefteq_0 y \leftrightarrow x \leq_0 y$ é uma fórmula limitada, logo coincide com a sua B-tradução. Sendo ela um axioma, obviamente é derivável em $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$. É então fácil (usando $\mathsf{B}_\forall$: se B é derivável, então $\forall z \trianglelefteq qB$ equivale a $\forall z(z \trianglelefteq q \to B)$ que é obviamente derivável) ver que o uplo vazio de termos está nas condições pretendidas:

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \tilde{\forall}a, b\forall x, y \trianglelefteq a, b(x \trianglelefteq_0 y \leftrightarrow x \leq_0 y).$$

$\underline{\mathsf{B}_\forall}$ Tratemos da implicação da esquerda para a direita de $\mathsf{B}_\forall$. Temos

$$[\forall z \trianglelefteq qA \to \forall z(z \trianglelefteq q \to A)]^B \equiv \tilde{\exists}\underline{\mathbb{X}'}, \underline{Y}\tilde{\forall}\underline{x}, w, \underline{y'}$$
$$\big[\tilde{\forall}\underline{y} \trianglelefteq \underline{Y}\,\underline{x}w\underline{y'}\forall z \trianglelefteq qA_B(\underline{x}, \underline{y}) \to \forall z \trianglelefteq w\big(z \trianglelefteq q \to A_B(\underline{\mathbb{X}'}\underline{x}w, \underline{y'})\big)\big].$$

Os termos

$$\begin{array}{rcl} \underline{t_{\mathbb{X}'}} & :\equiv & \lambda\underline{a}, \underline{x}, w\,.\,\underline{x}, \\ \underline{t_Y} & :\equiv & \lambda\underline{a}, \underline{x}, w, \underline{y'}\,.\,\underline{y'}. \end{array}$$

estão nas condições pretendidas.
Tratemos da implicação da direita para a esquerda de $\mathsf{B}_\forall$. Temos

$$[\forall z(z \trianglelefteq q \to A) \to \forall q \trianglelefteq tA]^B \equiv \tilde{\exists}\underline{X}, W, \underline{Y'}\tilde{\forall}\underline{X'}, \underline{y}$$
$$\big[\tilde{\forall}w, \underline{y'} \trianglelefteq W\underline{X'}\underline{y}, \underline{Y'}\,\underline{X'}\underline{y}\forall z \trianglelefteq w\big(z \trianglelefteq q \to A_B(\underline{X'}w, \underline{y'})\big) \to \forall z \trianglelefteq qA_B(\underline{X}\,\underline{X'}, \underline{y})\big].$$

Seja $\tilde{q}$ um majorante do termo fechado $\lambda\underline{l}\,.\,q(\underline{l})$. Temos $\tilde{q} \trianglelefteq \tilde{q}$ e se $\underline{l} \trianglelefteq \underline{a} \to q(\underline{l}) \trianglelefteq \tilde{q}\underline{a}$.
Os termos

$$\begin{array}{rcl} \underline{t_X} & :\equiv & \lambda\underline{a}, \underline{X'}\,.\,[\underline{X'}(\tilde{q}\underline{a})], \\ t_W & :\equiv & \lambda\underline{a}\underline{X'}, \underline{y}\,.\,(\tilde{q}\underline{a}), \\ \underline{t_{Y'}} & :\equiv & \lambda\underline{a}, \underline{X'}, \underline{y}\,.\,\underline{y}, \end{array}$$

estão nas condições pretendidas.

$\underline{\mathsf{bAC}}$ As B-traduções do antecedente e consequente de bAC são

$$\begin{array}{rcl} (\forall u \exists v A)^B & \equiv & \tilde{\exists}W, \underline{X}\tilde{\forall}w', \underline{y}\forall u \trianglelefteq w'\exists v \trianglelefteq Ww'\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y}A_B(\underline{X}w', \underline{\tilde{y}}), \\ (\tilde{\exists}V\tilde{\forall}z\forall u \trianglelefteq z\exists v \trianglelefteq VzA)^B & \equiv & \exists w''', \underline{X'}\tilde{\forall}w'', \underline{y'}\exists V \trianglelefteq w'''\forall\hat{w}'', \underline{\hat{y}'} \trianglelefteq w'', \underline{y'} \\ & & \big[V \trianglelefteq V \wedge \forall z \trianglelefteq \hat{w}''\big(z \trianglelefteq z \to \\ & & \forall u \trianglelefteq z\exists v \trianglelefteq Vz\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}'} \trianglelefteq \underline{\hat{y}'}A_B(\underline{X'}\hat{w}'', \underline{\tilde{y}'})\big)\big]. \end{array}$$

Temos

$$(\forall u \exists v A \to \tilde{\exists}V\tilde{\forall}z\forall u \trianglelefteq z\exists v \trianglelefteq VzA)^B \equiv$$
$$\tilde{\exists}W''', \underline{\mathbb{X}'}, W', \underline{Y}\tilde{\forall}W, \underline{X}, w'', \underline{y'}$$
$$\Big[\tilde{\forall}w', \underline{y} \trianglelefteq W'W\underline{X}w''\underline{y'}, \underline{Y}W\underline{X}w''\underline{y'}\forall u \trianglelefteq w'\exists v \trianglelefteq Ww'\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y}A_B(\underline{X}w', \underline{\tilde{y}}) \to$$
$$\exists V \trianglelefteq W'''W\underline{X}\forall\hat{w}'', \underline{\hat{y}'} \trianglelefteq w'', \underline{y'}$$
$$\Big(V \trianglelefteq V \wedge \forall z \trianglelefteq \hat{w}''\big(z \trianglelefteq z \to \forall u \trianglelefteq z\exists v \trianglelefteq Vz\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}'} \trianglelefteq \underline{\hat{y}'}A_B(\underline{\mathbb{X}'}W\underline{X}\hat{w}'', \underline{\tilde{y}'})\big)\Big)\Big].$$

Vejamos que os termos

$$\begin{array}{rcl} t_{W'} & :\equiv & \lambda\underline{a}, W, \underline{X}, w'', \underline{y'}\,.\,w'', \\ \underline{t_Y} & :\equiv & \lambda\underline{a}, W, \underline{X}, w'', \underline{y'}\,.\,\underline{y'}, \\ t_{W'''} & :\equiv & \lambda\underline{a}, W, \underline{X}\,.\,W, \\ \underline{t_{\mathbb{X}'}} & :\equiv & \lambda\underline{a}, W, \underline{X}, \hat{w}''\,.\,(\underline{X}\hat{w}''), \end{array}$$

estão nas condições pretendidas, isto é, são fechados (óbvio), monótono (verificamos usando a generalização de $\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}$) e verificam

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}\forall \underline{l} \trianglelefteq \underline{a}\tilde{\forall}W, \underline{X}, w'', \underline{y'}$$
$$\Big[\tilde{\forall}w', \underline{y} \trianglelefteq t_{W'}\underline{a}W\underline{X}w''\underline{y'}, \underline{t_Y}\underline{a}W\underline{X}w''\underline{y'}\forall u \trianglelefteq w'\exists v \trianglelefteq Ww'\forall\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y}A_B(\underline{X}w', \underline{\tilde{y}}) \to$$
$$\exists V \trianglelefteq t_{W'''}\underline{a}W\underline{X}\forall\hat{w}'', \underline{\hat{y}'} \trianglelefteq w'', \underline{y'}$$
$$\Big(V \trianglelefteq V \wedge \forall z \trianglelefteq \hat{w}''\big(z \trianglelefteq z \to \forall u \trianglelefteq z\exists v \trianglelefteq Vz\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}'} \trianglelefteq \underline{\hat{y}'}A_B(\underline{t_{\mathbb{X}'}}\underline{a}W\underline{X}\hat{w}'', \underline{\tilde{y}'})\big)\Big)\Big],$$

o que com estes termos equivale a (a fórmula B mencionada de seguida está definida na última linha)

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}\forall \underline{l} \trianglelefteq \underline{a}\tilde{\forall}W, \underline{X}, w'', \underline{y'}$$
$$\Big[\tilde{\forall}w', \underline{y} \trianglelefteq w'', \underline{y'}\underbrace{\forall u \trianglelefteq w'\exists v \trianglelefteq Ww'\forall\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y}A_B(\underline{X}w', \underline{\tilde{y}})}_{\leftrightarrow B(w', W, \underline{y}, \underline{X}, w')} \to$$
$$\exists V \trianglelefteq W\forall\hat{w}'', \underline{\hat{y}'} \trianglelefteq w'', \underline{y'}$$
$$\Big(V \trianglelefteq V \wedge \forall z \trianglelefteq \hat{w}''\big(z \trianglelefteq z \to \underbrace{\forall u \trianglelefteq z\exists v \trianglelefteq Vz\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}'} \trianglelefteq \underline{\hat{y}'}A_B(\underline{X}\hat{w}'', \underline{\tilde{y}'})}_{\equiv: B(z, V, \underline{\hat{y}'}, \underline{X}, \hat{w}'')}\big)\Big)\Big].$$

Suponhamos $\underline{a} \trianglelefteq \underline{a}$, $\underline{l} \trianglelefteq \underline{a}$, $W, \underline{X}, w'', \underline{y'} \trianglelefteq W, \underline{X}, w'', \underline{y'}$, o antecedente, $\hat{w}'', \underline{\hat{y}'} \trianglelefteq w'', \underline{y'}$ e $z \trianglelefteq \hat{w}''$. De $\hat{w}'' \trianglelefteq w''$, $\underline{\hat{y}'} \trianglelefteq \underline{y'}$ e $z \trianglelefteq \hat{w}''$ vem $B(z, W, \underline{\hat{y}'}, \underline{X}, z)$. Como $\underline{X}z \trianglelefteq \underline{X}\hat{w}''$ (resulta de $\underline{X} \trianglelefteq \underline{X}$, $z \trianglelefteq \hat{w}''$ e M_2), pelo lema da monotonia de B, de $B(z, W, \underline{\hat{y}'}, \underline{X}, z)$ vem $B(z, W, \underline{\hat{y}'}, \underline{X}, \hat{w}'')$. Como $W \trianglelefteq W$, então o termo $q_V :\equiv W$ é tal que $q_V \trianglelefteq W$ e $q_V \trianglelefteq q_V$. Usando o termo q_V para testemunhar o quantificador $\exists V \trianglelefteq W$ do consequente, sai agora facilmente o consequente. □

Teorema 170 (da caracterização de B)**.** *Para toda a fórmula A de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$, temos*

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{bAC} + \mathsf{bIP} + \mathsf{bM} + \mathsf{bUD} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ} \vdash A \leftrightarrow A^B.$$

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução na complexidade das fórmulas. Vamos verificar apenas alguns símbolos lógicos para dar a ideia da demonstração. A demonstração completa pode ser encontra em [Ferreira e Oliva 2005], subsecção 4.2. Seja $\mathsf{T} := \mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{bAC} + \mathsf{bIP} + \mathsf{bM} + \mathsf{bUD} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ}$.

$\underline{A \vee B}$ Temos

$$\begin{aligned} A^B &\equiv \tilde{\exists}\underline{x}\tilde{\forall}\underline{y}A_B(\underline{x}, \underline{y}), \\ B^B &\equiv \tilde{\exists}\underline{x'}\tilde{\forall}\underline{y'}B_B(\underline{x'}, \underline{y'}), \\ (A \vee B)^B &\equiv \tilde{\exists}\underline{x}, \underline{x'}\tilde{\forall}\underline{y}, \underline{y'}[\tilde{\forall}\underline{\tilde{y}} \trianglelefteq \underline{y}A_B(\underline{x}, \underline{\tilde{y}}) \vee \tilde{\forall}\underline{\tilde{y}'} \trianglelefteq \underline{y'}B_B(\underline{x'}, \underline{\tilde{y}'})]. \end{aligned}$$

Usando a hipótese de indução na primeira equivalência e bUD na segunda equivalência, temos

$$
\begin{aligned}
\mathsf{T} \vdash A \vee B &\leftrightarrow A^B \vee B^B \\
&\leftrightarrow \tilde{\exists}\underline{x}, \underline{x'}[\tilde{\forall}\underline{y} A_B(\underline{x}, \underline{y}) \vee \tilde{\forall}\underline{y'} B_B(\underline{x'}, \underline{y'})] \\
&\leftrightarrow (A \vee B)^B.
\end{aligned}
$$

$\underline{A \to B}$ Temos

$$
\begin{aligned}
A^B &\equiv \tilde{\exists}\underline{x}\tilde{\forall}\underline{y} A_B(\underline{x}, \underline{y}), \\
B^B &\equiv \tilde{\exists}\underline{x'}\tilde{\forall}\underline{y'} B_B(\underline{x'}, \underline{y'}), \\
(A \to B)^B &\equiv \tilde{\exists}\underline{X'}, \underline{Y}\tilde{\forall}\underline{x}, \underline{y'}[\tilde{\forall}\underline{y} \trianglelefteq \underline{Y}\,\underline{x}\underline{y'} A_B(\underline{x}, \underline{y}) \to B_B(\underline{X'}\,\underline{x}, \underline{y'})].
\end{aligned}
$$

Usando a hipótese de indução na primeira equivalência, regras de prenifixação na segunda equivalência, bIP (generalizada a uplos) na terceira equivalência, o lema da monotonia de B na quarta equivalência, novamente regras de prenifixação na quinta equivalência, bM (generalizado a uplos) aplicado a $\tilde{\forall}\underline{y} A_B(\underline{x}, \underline{y}) \to B_B(\underline{z}, \underline{y'})$ na sexta equivalência e a proposição 162 (generalizada a uplos) na sétima e oitava equivalências (nesta última aplicada a $\tilde{\forall}\underline{x}, \underline{y'}\tilde{\exists}\underline{w}[\tilde{\forall}\underline{y} \trianglelefteq \underline{w} A_B(\underline{x}, \underline{y}) \to B_B(\underline{X}\,\underline{x}, \underline{y'})]$), temos

$$
\begin{aligned}
\mathsf{T} \vdash (A \to B) &\leftrightarrow (A^B \to B^B) \\
&\leftrightarrow \tilde{\forall}\underline{x}[\tilde{\forall}\underline{y} A_B(\underline{x}, \underline{y}) \to \tilde{\exists}\underline{x'}\tilde{\forall}\underline{y'} B_B(\underline{x'}, \underline{y'})] \\
&\leftrightarrow \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{z}[\tilde{\forall}\underline{y} A_B(\underline{x}, \underline{y}) \to \tilde{\exists}\underline{x'} \trianglelefteq \underline{z}\tilde{\forall}\underline{y'} B_B(\underline{x'}, \underline{y'})] \\
&\leftrightarrow \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{z}[\tilde{\forall}\underline{y} A_B(\underline{x}, \underline{y}) \to \tilde{\forall}\underline{y'} B_B(\underline{z}, \underline{y'})] \\
&\leftrightarrow \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{z}\tilde{\forall}\underline{y'}[\tilde{\forall}\underline{y} A_B(\underline{x}, \underline{y}) \to B_B(\underline{z}, \underline{y'})] \\
&\leftrightarrow \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{z}\tilde{\forall}\underline{y'}\tilde{\exists}\underline{w}[\tilde{\forall}\underline{y} \trianglelefteq \underline{w} A_B(\underline{x}, \underline{y}) \to B_B(\underline{z}, \underline{y'})] \\
&\leftrightarrow \tilde{\exists}\underline{X'}\tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\forall}\underline{y'}\tilde{\exists}\underline{w}[\tilde{\forall}\underline{y} \trianglelefteq \underline{w} A_B(\underline{x}, \underline{y}) \to B_B(\underline{X'}\,\underline{x}, \underline{y'})] \\
&\leftrightarrow (A \to B)^B.
\end{aligned}
$$

$\underline{\forall z A}$ Temos

$$
\begin{aligned}
A^B &\equiv \tilde{\exists}\underline{x}\tilde{\forall}\underline{y} A_B(\underline{x}, \underline{y}), \\
(\forall z A)^B &\equiv \tilde{\exists}\underline{X}\tilde{\forall}w, \underline{y}\forall z \trianglelefteq w A_B(\underline{X}w, \underline{y}).
\end{aligned}
$$

Usando a hipótese de indução na primeira equivalência, $\mathsf{B}_\exists$ na segunda equivalência, bAC (generalizado a uplos) na implicação da esquerda para a direita da terceira equivalência, MAJ (da seguinte forma: cada z admite um w tal que $z \trianglelefteq w$, logo $w \trianglelefteq w$ pela proposição 142) na implicação da direita para a esquerda da mesma equivalência, o lema da monotonia de B na quarta equivalência, regras de prenifixação na quinta equivalência e o facto de $\underline{X}w \trianglelefteq \underline{X}w$ ser consequência de $\underline{X} \trianglelefteq \underline{X}$ e $w \trianglelefteq w$ (graças a M_2) na sexta equivalência, temos

$$\begin{aligned}
\mathsf{T} \vdash \forall z A \ &\leftrightarrow\ \forall z A^B \\
&\leftrightarrow\ \forall z \exists \underline{x}[\underline{x} \trianglelefteq \underline{x} \wedge \tilde{\forall} \underline{y} A_B(\underline{x}, \underline{y})] \\
&\leftrightarrow\ \tilde{\exists} \underline{X} \tilde{\forall} w \forall z \trianglelefteq w \exists \underline{x} \trianglelefteq \underline{X}w[\underline{x} \trianglelefteq \underline{x} \wedge \tilde{\forall} \underline{y} A_B(\underline{x}, \underline{y})] \\
&\leftrightarrow\ \tilde{\exists} \underline{X} \tilde{\forall} w \forall z \trianglelefteq w \tilde{\forall} \underline{y} A_B(\underline{X}w, \underline{y}) \\
&\leftrightarrow\ \tilde{\exists} \underline{X} \tilde{\forall} w, \underline{y} \forall z \trianglelefteq w A_B(\underline{X}w, \underline{y}) \\
&\leftrightarrow\ (\forall z A)^B. \quad \square
\end{aligned}$$

Observação 171. Analogamente à observação 73, podemos concluir que no teorema da correcção de B não faltam princípios.

Teorema 172 (da extracção de programas por B)**.** *Seja $A_l(x, y)$ uma fórmula limitada de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ tal que $FV(A_l) = \{x, y\}$. Se*

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{bAC} + \mathsf{bIP} + \mathsf{bM} + \mathsf{bUD} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ} \vdash \forall x \exists y A_l(x, y),$$

então existe um termo fechado monótono t de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$, que pode ser calculado a partir de uma derivação de $\forall x \exists y A_l(x, y)$, tal que $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \tilde{\forall} w \forall x \trianglelefteq w \exists y \trianglelefteq tw A_l(x, y)$.

Demonstração. Temos $[\forall x \exists y A_l(x, y)]^B \equiv \tilde{\exists} Z \tilde{\forall} w \forall x \trianglelefteq w \exists y \trianglelefteq Zw A_l(x, y)$. Pelo teorema da correcção de B existe um termo fechado monótono t tal que (atendendo a que $FV\big(\forall x \exists y A_l(x, y)\big) = \emptyset$) $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \tilde{\forall} w \forall x \trianglelefteq w \exists y \trianglelefteq tw A_l(x, y)$. $\square$

Teorema 173 (da conservação por B)**.** *Seja A_l uma fórmula limitada de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$. Se*

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{bAC} + \mathsf{bIP} + \mathsf{bM} + \mathsf{bUD} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ} \vdash \forall x \exists y A_l,$$

então $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{MAJ} \vdash \forall x \exists y A_l$.

Demonstração. Repetindo os argumentos do teorema da extracção de programas por B, obtemos $\mathsf{HA}^\omega_0 \vdash \tilde{\forall} \underline{a} \forall \underline{l} \trianglelefteq \underline{a} \tilde{\forall} w \forall x \trianglelefteq w \exists y \trianglelefteq t\underline{a}w A_l$, onde $\underline{l}$ são as variáveis de $FV(\forall x \exists y A_l)$. Daqui, com a ajuda de MAJ, sai facilmente o resultado. $\square$

Observação 174. Pode-se provar que a teoria $\mathsf{TH} := \mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{bAC} + \mathsf{bIP} + \mathsf{bM} + \mathsf{bUD} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ}$ é inconsistente com a lógica clássica, isto é, existe uma fórmula A de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ (até de HA^ω_0) tal que $\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash A$ (até $\mathsf{PA}^\omega_0 \vdash A$) e $\mathsf{TH} \vdash \neg A$ (ver [Ferreira e Oliva 2005], subsecção 6.2).
Este facto tem uma consequência interessante. Seja A_l for uma fórmula limitada sem variáveis livres. Pelo teorema da correcção de B temos $\mathsf{TH} \vdash A_l \ \Rightarrow\ \mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash A_l$. Em [Ferreira e Oliva 2005], subsecção 6.3, é notado que interpretando em A_l o majoração $\trianglelefteq_\rho$ como sendo a *majoração de Howard-Bezem* $\leq^*_\rho$ definida por indução nos tipos finitos por

$$\begin{aligned}
x \leq^*_0 y \ &:\equiv\ x \leq_0 y, \\
x \leq^*_{\sigma\rho} y \ &:\equiv\ \forall u^\rho, v^\rho (u \leq^*_\rho v \to xu \leq^*_\sigma yv \wedge yu \leq^*_\sigma yv),
\end{aligned}$$

e considerando as quantificações limitadas $\forall x \trianglelefteq_\rho tB$ e $\exists x \trianglelefteq_\rho tB$ como abreviaturas de $\forall x(x \leq^*_\rho t \to B)$ e $\exists x(x \leq^*_\rho t \wedge B)$, respectivamente, obtemos uma fórmula A^*_l de HA^ω_0 e temos $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash A_l \;\Rightarrow\; \mathsf{HA}^\omega_0 \vdash A^*_l$. Portanto podemos provar $\mathsf{HA}^\omega_0 \vdash A^*_l$ usando a teoria "falsa" TH!

Capítulo 9

Extensão da tradução negativa de Kuroda

No capítulo 3 vimos a tradução de Kuroda no contexto de HA_0^ω. Agora vamos estendê-la a $\mathsf{HA}_{0\trianglelefteq}^\omega$ da forma natural: introduzindo uma dupla negação depois de cada quantificação universal, limitada ou não.

Definição 175. Estendemos a definição da *tradução negativa de Kuroda Ku* para fórmulas de PA_0^ω (definição 80) às fórmulas de $\mathsf{PA}_{0\trianglelefteq}^\omega$ pelas cláusulas:

1. $(\exists x \trianglelefteq tA)_{Ku} :\equiv \exists x \trianglelefteq tA_{Ku}$;
2. $(\forall x \trianglelefteq tA)_{Ku} :\equiv \forall x \trianglelefteq t\neg\neg A_{Ku}$.

Na demonstração do teorema da correcção de Ku vamos precisar da estabilidade de $x \trianglelefteq_\rho y$ sob duplas negações.

Lema 176 (*axiomas da estabilidade*)**.** *Temos* $\mathsf{HA}_{0\trianglelefteq}^\omega \vdash \neg\neg(x \trianglelefteq_\rho y) \to x \trianglelefteq_\rho y$.

Demonstração. Provamos o resultado por indução nos tipos. Provamos o caso base reduzindo $x \trianglelefteq_\rho y$ a $x \leq_0 y$ e usando o facto de LDN valer para esta fórmula porque ela não tem quantificadores e é uma fórmula de HA_0^ω (não apenas de $\mathsf{HA}_{0\trianglelefteq}^\omega$). Vejamos o passo de indução. Por $\mathsf{RL}_\trianglelefteq$, para provar $\neg\neg(x \trianglelefteq_{\sigma\rho} y) \to x \trianglelefteq_{\sigma\rho} y$ é suficiente provar

$$\neg\neg(x \trianglelefteq_{\sigma\rho} y) \wedge u \trianglelefteq_\rho v \to xu \trianglelefteq_\sigma yv \wedge yu \trianglelefteq_\sigma yv. \tag{9.1}$$

A implicação $x \trianglelefteq_{\sigma\rho} y \wedge u \trianglelefteq_\rho v \to xu \trianglelefteq_\sigma yv \wedge yu \trianglelefteq_\sigma yv$ é uma instanciação de M_2. Passando duas vezes ao contra-recíproco resulta

$$\neg\neg(x \trianglelefteq_{\sigma\rho} y \wedge u \trianglelefteq_\rho v) \to \neg\neg(xu \trianglelefteq_\sigma yv \wedge yu \trianglelefteq_\sigma yv).$$

Daqui, usando $\neg\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg\neg A \wedge \neg\neg B$ (que vale intuicionisticamente), vem

$$\neg\neg(x \trianglelefteq_{\sigma\rho} y) \wedge \neg\neg(u \trianglelefteq_\rho v) \to \neg\neg(xu \trianglelefteq_\sigma yv) \wedge \neg\neg(yu \trianglelefteq_\sigma yv).$$

Aplicando a hipótese de indução às majorações de tipo ρ e σ resulta (9.1). $\square$

Teorema 177 (da correcção de Ku). *Seja A uma fórmula arbitrária de $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$.*

1. *Se $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash A$, então $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash A^{Ku}$.*

2. *Se $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ} \vdash A$, então $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bIP} + \mathsf{bM} + \mathsf{MAJ} \vdash A^{Ku}$.*

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução no comprimento das derivações. Vamos verificar apenas alguns axiomas e regras lógicos para dar a ideia da demonstração. A demonstração completa pode ser encontrada em [Ferreira e Oliva 2005], secção 5 e subsecção 6.3.

1. Os casos dos axiomas e regras de $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$ que são também axiomas e regras de PA^{ω}_{0} já foram estudados na demonstração do teorema 82.

$\underline{\mathsf{M}_1}$ A fórmula M_1 não tem quantificadores, pelo a sua Ku-tradução é a dupla negação de M_1. Tal torna trivial provar o resultado para esta fórmula.

$\underline{\mathsf{M}_2}$ Provemos

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash [x \trianglelefteq y \to \forall u \trianglelefteq v(xu \trianglelefteq yv \wedge yu \trianglelefteq yv)]^{Ku} \equiv \\ \neg\neg[x \trianglelefteq y \to \forall u \trianglelefteq v\neg\neg(xu \trianglelefteq yv \wedge yu \trianglelefteq yv)].$$

Suponhamos $x \trianglelefteq y$ e $u \trianglelefteq v$. Por M_2 temos $xu \trianglelefteq yv \wedge yu \trianglelefteq yv$, logo passando à dupla negação temos $\neg\neg(xu \trianglelefteq yv \wedge yu \trianglelefteq yv)$. Então temos $u \trianglelefteq v \to \neg\neg(xu \trianglelefteq yv \wedge yu \trianglelefteq yv)$, e como agora u não ocorre livre na única hipótese aberta, que é $x \trianglelefteq y$, vem $\forall u[u \trianglelefteq v \to \neg\neg(xu \trianglelefteq yv \wedge yu \trianglelefteq yv)]$, o que por $\mathsf{B}_\forall$ equivale a $\forall u \trianglelefteq v\neg\neg(xu \trianglelefteq yv \wedge yu \trianglelefteq yv)$. Portanto temos $x \trianglelefteq y \to \forall u \trianglelefteq v\neg\neg(xu \trianglelefteq yv \wedge yu \trianglelefteq yv)$, donde passando à dupla negação concluímos $[x \trianglelefteq y \to \forall u \trianglelefteq v(xu \trianglelefteq yv \wedge yu \trianglelefteq yv)]^{Ku}$.

$\underline{\mathsf{B}_\forall}$ Obtemos

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash [\forall x \trianglelefteq tA \leftrightarrow \forall x(x \trianglelefteq t \to A)]^{Ku} \equiv \neg\neg[\forall x \trianglelefteq t\neg\neg A_{Ku} \leftrightarrow \forall x\neg\neg(x \trianglelefteq t \to A_{Ku})]$$

passando à dupla negação de

$$\begin{aligned}\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash \forall x \trianglelefteq t\neg\neg A_{Ku} &\leftrightarrow \forall x(x \trianglelefteq t \to \neg\neg A_{Ku}) \\ &\leftrightarrow \forall x\neg\neg(x \trianglelefteq t \to A_{Ku}),\end{aligned}$$

onde na segunda equivalência usámos $(B \to \neg\neg C) \leftrightarrow \neg\neg(B \to C)$ (que vale intuicionisticamente).

$\underline{\mathsf{RL}_\trianglelefteq}$ Por hipótese de indução, suponhamos que

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash (A_l \wedge u \trianglelefteq v \to su \trianglelefteq tv \wedge tu \trianglelefteq tv)^{Ku} \equiv \neg\neg[(A_l)_{Ku} \wedge u \trianglelefteq v \to su \trianglelefteq tv \wedge tu \trianglelefteq tv],$$

onde $(A_l)_{Ku}$ ainda é uma fórmula limitada. Passando a dupla negação para o consequente usando $\neg\neg(A \to B) \leftrightarrow (A \to \neg\neg B)$ (que vale intuicionisticamente), depois usando $\neg\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg\neg A \wedge \neg\neg B$ (que vale intuicionisticamente) e finalmente fazendo "desaparecer" as duas duplas negações pelos axiomas da estabilidade, obtemos $(A_l)_{Ku} \wedge u \trianglelefteq v \to su \trianglelefteq tv \wedge tu \trianglelefteq tv$, onde $(A_l)_{Ku}$ ainda é uma fórmula limitada. Por $\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}$ sai $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash (A_l)_{Ku} \to s \trianglelefteq t$. Logo

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash (A_l \to u \trianglelefteq t)^{Ku} \equiv \neg\neg[(A_l)_{Ku} \to s \trianglelefteq t].$$

2. Basta estendermos a alínea anterior a $\mathsf{B\text{-}bAC}$, bCC e MAJ. Seja $\mathsf{HT} := \mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bIP} + \mathsf{bM} + \mathsf{MAJ}$.

<u>B-bAC</u> Temos

$$\begin{gathered}(\forall x \exists y A_l \to \tilde{\exists} Y \tilde{\forall} z \forall x \trianglelefteq z \exists y \trianglelefteq Yz A_l)^{Ku} \equiv \\ \neg\neg\big[\forall x \neg\neg\exists y (A_l)_{Ku} \to \tilde{\exists} Y \forall z \neg\neg\big(z \trianglelefteq z \to \forall x \trianglelefteq z \neg\neg\exists y \trianglelefteq Yz(A_l)_{Ku}\big)\big].\end{gathered}$$

Usando $\neg\neg(A \to B) \leftrightarrow (A \to \neg\neg B)$ e $\neg\neg\forall x \neg\neg A \leftrightarrow \forall x \neg\neg A$ (que valem intuicionisticamente), verificamos que $(\forall x \exists y A_l \to \tilde{\exists} Y \tilde{\forall} z \forall x \trianglelefteq z \exists y \trianglelefteq Yz A_l)^{Ku}$ é equivalente a

$$\forall x \neg\neg\exists y (A_l)_{Ku} \to \neg\neg\tilde{\exists} Y \tilde{\forall} z \forall x \trianglelefteq z \neg\neg\exists y \trianglelefteq Yz(A_l)_{Ku}. \tag{9.2}$$

Suponhamos o antecedente de (9.2). Dele, pela proposição 161, vem $\forall x \tilde{\exists} z \neg\neg\exists y \trianglelefteq z(A_l)_{Ku}$. Daqui, por $\mathsf{B\text{-}bAC}$, vem $\tilde{\exists} Z \tilde{\forall} w \forall x \trianglelefteq w \exists z \trianglelefteq Zw \neg\neg\exists y \trianglelefteq z(A_l)_{Ku}$. Pela transitividade de $\trianglelefteq$ vem $\tilde{\exists} Z \tilde{\forall} w \forall x \trianglelefteq w \neg\neg\exists y \trianglelefteq Zw(A_l)_{Ku}$. Daqui vem o consequente de (9.2).

<u>MAJ</u> Provamos

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash [\forall x \exists y (x \trianglelefteq y)]^{Ku} \equiv \neg\neg\forall x \neg\neg\exists y (x \trianglelefteq y)$$

usando MAJ para provar $\forall x \neg\neg\exists y (x \trianglelefteq y)$ e depois passando à dupla negação. ☐

Observação 178. Os princípios bIP, bM e bUD são deriváveis em $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{MAJ}$, pelo que podiam constar na teoria da hipótese da segunda alínea do teorema da correcção de Ku.

Teorema 179 (da caracterização de Ku)**.** *Para toda a fórmula A de $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$, temos $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash A \leftrightarrow A^{Ku}$.*

Demonstração. Fazemos facilmente a demonstração por indução na complexidade das fórmulas (notar que a lógica em questão é clássica). ☐

Observação 180. Analogamente à observação 73, podemos concluir que no teorema da correcção de Ku não faltam princípios.

No capítulo 11 vamos trabalhar com a teoria $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM}$. Nesse capítulo, na demonstração do teorema da correcção de M, iremos fazer simplificações como, por exemplo, simplificar $\neg\forall x \trianglelefteq t \neg A_l$ para $\exists x \trianglelefteq t A_l$ no contexto da teoria $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM}$, onde A_l é uma fórmula limitada. É óbvio que $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash \neg\forall x \trianglelefteq t \neg A_l \leftrightarrow \exists x \trianglelefteq t A_l$. Pelo próximo teorema podemos concluir $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \neg\forall x \trianglelefteq t \neg A_l \leftrightarrow \exists x \trianglelefteq t A_l$, o que justifica a simplificação no contexto $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM}$.

Teorema 181 (da conservação por Ku)**.** *Seja A_l uma fórmula limitada de $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$. Se $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash A_l$, então $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash A_l$.*

Demonstração. Pelo teorema da correcção de Ku temos $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash (A_l)^{Ku} \equiv \neg\neg(A_l)_{Ku}$. Como $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM}$ deriva LDN para fórmula limitadas e $(A_l)_{Ku}$ é uma fórmula limitada, então $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash (A_l)_{Ku}$. Agora basta mostrar $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash (A_l)_{Ku} \leftrightarrow A_l$, o que fazemos facilmente por indução na complexidade das fórmulas limitadas. $\square$

Capítulo 10

Composição da interpretação funcional limitada com a tradução negativa de Kuroda

À imagem do que fizemos com a interpretação funcional de Gödel D e a tradução negativa de Kuroda Ku, vamos compor a interpretação funcional limitada B com a extensão de Ku e assim obter uma interpretação funcional de $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$ em $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$.

$$\mathsf{PA}^{\omega}_{0} \xrightarrow{Ku} \mathsf{HA}^{\omega}_{0} \xrightarrow{D} \mathsf{HA}^{\omega}_{0}$$
$$\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \xrightarrow[Ku]{} \mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \xrightarrow[B]{} \mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$$

Teorema 182 (da correcção de $Ku\,B$)**.** *Sejam A uma fórmula arbitrária de $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$, $\underline{l}$ todas as variáveis livres de A e $(A^{Ku})^B \equiv \tilde{\exists}\underline{x}\tilde{\forall}\underline{y}(A^{Ku})_B(\underline{x},\underline{y})$. Se*

$$\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ} \vdash A,$$

então existe um uplo de termos fechados monótonos $\underline{t}$ de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$, que pode ser calculado a partir de uma derivação de A, tal que

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}\forall\underline{l} \trianglelefteq \underline{a}\tilde{\forall}\underline{y}(A^{Ku})_B(\underline{t}\,\underline{a},\underline{y}).$$

Demonstração. Pelo teorema da correcção de Ku temos $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bIP} + \mathsf{bM} + \mathsf{MAJ} \vdash A^{Ku}$, onde $\underline{l}$ também são todas as variáveis livres de A^{Ku}. Daqui, pelo teorema da caracterização de B, vem o resultado. □

Teorema 183 (da caracterização de $Ku\,B$)**.** *Para toda a fórmula A de $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$, temos*

$$\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{bAC} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ} \vdash A \leftrightarrow (A^{Ku})^B.$$

Demonstração. Pelo teorema da correcção de Ku temos $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash A \leftrightarrow A^{Ku}$. Pelo teorema da correcção de B temos $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{bAC} + \mathsf{bIP} + \mathsf{bM} + \mathsf{bUD} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ} \vdash$

$A^{Ku} \leftrightarrow (A^{Ku})^B$. Portanto $\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq}+\mathsf{bAC}+\mathsf{bIP}+\mathsf{bM}+\mathsf{bUD}+\mathsf{bCC}+\mathsf{MAJ} \vdash A \leftrightarrow (A^{Ku})^B$. O resultado vem agora de notar que os princípios bIP, bM e bUD são deriváveis em $\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{MAJ}$. □

Observação 184. Ao contrário da observação 73, *não* podemos concluir que no teorema da correcção de $Ku\,B$ não faltem princípios.

Teorema 185 (da extracção de programas por $Ku\,B$)**.** *Seja $A_l(x,y)$ uma fórmula limitada de $\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ tal que $FV(A_l) = \{x,y\}$. Se*

$$\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ} \vdash \forall x \exists y A_l(x,y),$$

então existe um termo fechado monótono t de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$, que pode ser calculado a partir de uma derivação de $\forall x \exists y A_l(x,y)$, tal que $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}+\mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall} v \forall x \trianglelefteq v \exists y \trianglelefteq tv A_l(x,y)$.

Demonstração. Pelo teorema da correcção de Ku, temos

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bIP} + \mathsf{bM} + \mathsf{MAJ} \vdash [\forall x \exists y A_l(x,y)]^{Ku} \equiv \neg\neg\forall x \neg\neg\exists y (A_l)_{Ku}(x,y),$$

onde $(A_l)_{Ku}(x,y)$ ainda é uma fórmula limitada. Usando $\neg\neg\forall x B \to \forall x \neg\neg B$ (que vale intuicionisticamente) e a proposição 161 vem

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bIP} + \mathsf{bM} + \mathsf{MAJ} \vdash \forall x \tilde{\exists} z \neg\neg\exists y \trianglelefteq z (A_l)_{Ku}(x,y).$$

Temos

$$[\forall x \tilde{\exists} z \neg\neg\exists y \trianglelefteq z (A_l)_{Ku}(x,y)]^B \equiv \tilde{\exists} U \tilde{\forall} v \forall x \trianglelefteq v \tilde{\exists} z \trianglelefteq Uv \neg\neg\exists y \trianglelefteq z (A_l)_{Ku}(x,y).$$

Pelo teorema da extracção de programas por B, existe um termo fechado monótono t tal que (atendendo a $FV\big(\forall x \tilde{\exists} z \neg\neg\exists y \trianglelefteq z (A_l)_{Ku}(x,y)\big) = \emptyset$).

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash \tilde{\forall} v \forall x \trianglelefteq v \tilde{\exists} z \trianglelefteq tv \neg\neg\exists y \trianglelefteq z (A_l)_{Ku}(x,y).$$

Pela $\mathsf{B\text{-}LEM}$ e transitividade de $\trianglelefteq$ vem $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}+\mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall} v \forall x \trianglelefteq v \exists y \trianglelefteq tv (A_l)_{Ku}(x,y)$. Obtemos agora o resultado usando $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}+\mathsf{B\text{-}LEM} \vdash (A_l)_{Ku}(x,y) \leftrightarrow A_l(x,y)$ (provamos este facto facilmente por indução na complexidade das fórmulas limitadas). □

Teorema 186 (da conservação por $Ku\,B$)**.** *Seja A_l uma fórmula sem quantificadores de $\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq}$. Se*

$$\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ} \vdash \forall x \exists y A_l,$$

então $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} + \mathsf{MAJ} \vdash \forall x \exists y A_l$.

Demonstração. Repetindo os argumentos do teorema da extracção de programas por $Ku\,B$, obtemos $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}+\mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall} \underline{a} \forall \underline{l} \trianglelefteq \underline{a} \tilde{\forall} v \forall x \trianglelefteq v \exists y \trianglelefteq t\underline{a}v A_l$, onde $\underline{l}$ são as variáveis de $FV(\forall x \exists y A_l)$. Daqui, com a ajuda de MAJ, sai facilmente o resultado. □

Capítulo 11

Interpretação funcional limitada à Shoenfield

11.1 Interpretação funcional limitada à Shoenfield

Nesta secção estudamos uma variante M da B-tradução, introduzida por Fernando Ferreira em [Ferreira 2007]. A M-tradução é talhada especificamente para a lógica clássica. Podemos dizer que M está para B assim como S está para D. Daí o nome *interpretação funcional limitada à Shoenfield*.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{PA}_0^\omega \arrow[r, "Ku"] \arrow[rr, bend right, "S"'] & \mathsf{HA}_0^\omega \arrow[r, "D"] & \mathsf{HA}_0^\omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{PA}_{0\trianglelefteq}^\omega \arrow[r, "Ku"] \arrow[rr, bend right, "M"'] & \mathsf{HA}_{0\trianglelefteq}^\omega \arrow[r, "B"] & \mathsf{HA}_{0\trianglelefteq}^\omega \end{tikzcd}$$

Definição 187. Para cada fórmula A de $\mathsf{PA}_{0\trianglelefteq}^\omega$ baseado em $\neg$, $\vee$ e $\forall$, definimos as fórmulas A^M e A_M de $\mathsf{PA}_{0\trianglelefteq}^\omega$ (M do inglês *monotone*), a primeira delas chamada *interpretação funcional limitada à Shoenfield* de A, por indução na complexidade das fórmulas.

1. Se A é fórmula atómica, então $A^M :\equiv \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}A_M(\underline{x},\underline{y}) :\equiv A$ onde $\underline{x}$ e $\underline{y}$ são uplos vazios.

Suponhamos que já definimos $A^M \equiv \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}A_M(\underline{x},\underline{y})$ e $B^M \equiv \tilde{\forall}\underline{x'}\tilde{\exists}\underline{y'}B_M(\underline{x'},\underline{y'})$. Então:

2. $(\neg A)^M :\equiv \tilde{\forall}\underline{Y}\tilde{\exists}\underline{x}(\neg A)_M(\underline{Y},\underline{x}) :\equiv \tilde{\forall}\underline{Y}\tilde{\exists}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{x}\neg A_M(\underline{\tilde{x}},\underline{Y}\,\underline{\tilde{x}})$;

3. $(A \vee B)^M :\equiv \tilde{\forall}\underline{x},\underline{x'}\tilde{\exists}\underline{y},\underline{y'}(A\vee B)_M(\underline{x},\underline{x'},\underline{y},\underline{y'}) :\equiv \tilde{\forall}\underline{x},\underline{x'}\tilde{\exists}\underline{y},\underline{y'}[A_M(\underline{x},\underline{y}) \vee B_M(\underline{x'},\underline{y'})]$;

4. $(\forall z \trianglelefteq tA)^M :\equiv \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}(\forall z \trianglelefteq tA)_M(\underline{x},\underline{y}) :\equiv \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}\forall z \trianglelefteq tA_M(\underline{x},\underline{y})$.

5. $(\forall zA)^M :\equiv \tilde{\forall}w,\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}(\forall zA)_M(w,\underline{x},\underline{y}) :\equiv \tilde{\forall}w,\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}\forall z \trianglelefteq wA_M(\underline{x},\underline{y})$;

Numa interpretação $A^M \equiv \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}A_M(\underline{x},\underline{y})$, supomos que as variáveis $\underline{x},\underline{y}$ são distintas e não ocorrem livres em A.
Se estivermos a encarar A^M e A_M como fórmulas baseadas em $\neg$, $\vee$ e $\forall$, então o símbolo $\neg$ que surge na alínea 2 é um símbolo primitivo e os símbolos $\tilde{\forall}zC$ e $\tilde{\exists}zC$ que surgem em todas as alíneas são abreviaturas de $\forall z(\neg z \trianglelefteq z \vee C)$ e $\neg\forall z\neg\neg(\neg z \trianglelefteq z \vee \neg C)$, respectivamente.
Se estivermos a encarar A^M e A_M como baseadas em $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$ e $\exists$ (por exemplo, como fórmulas de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$), então o símbolo $\neg$ que surge é um símbolo definido e os símbolos $\tilde{\forall}zC$ e $\tilde{\exists}zC$ são abreviaturas de $\forall z(z \trianglelefteq z \to C)$ e $\exists z(z \trianglelefteq z \wedge C)$, respectivamente, *não* de $\forall z(\neg z \trianglelefteq z \vee C)$ e $\neg\forall z\neg\neg(\neg z \trianglelefteq z \vee \neg C)$, respectivamente.

Notacao 188. No contexto de uma linguagem baseada em $\neg$, $\vee$, e $\forall$, definimos

$$\exists xA :\equiv \neg\forall x\neg A, \qquad \exists x \trianglelefteq tA :\equiv \neg\forall x \trianglelefteq t\neg A,$$

mas *não* definimos

$$\tilde{\exists}xA \equiv \neg\tilde{\forall}x\neg A, \qquad \tilde{\exists}x \trianglelefteq tA \equiv \neg\tilde{\forall}x \trianglelefteq t\neg A,$$

Assim, temos

$$\tilde{\exists}xA \equiv \exists x(x \trianglelefteq x \wedge A) \equiv \neg\forall x\neg(x \trianglelefteq x \wedge A) \equiv \neg\forall x\neg\neg(\neg x \trianglelefteq x \vee \neg A)$$

e *não*

$$\tilde{\exists}xA \equiv \neg\tilde{\forall}x\neg A \equiv \neg\forall x(x \trianglelefteq x \to \neg A) \equiv \neg\forall x(\neg x \trianglelefteq x \vee \neg A).$$

Analogamente, temos

$$\tilde{\exists}x \trianglelefteq tA \equiv \tilde{\exists}x \trianglelefteq t(x \trianglelefteq x \wedge A) \equiv \neg\forall x \trianglelefteq t\neg(x \trianglelefteq x \wedge A) \equiv \neg\forall x \trianglelefteq t\neg\neg(\neg x \trianglelefteq x \vee \neg A)$$

e *não*

$$\tilde{\exists}x \trianglelefteq tA \equiv \neg\tilde{\forall}x \trianglelefteq t\neg A \equiv \neg\forall x \trianglelefteq t(x \trianglelefteq x \to \neg A) \equiv \neg\forall x \trianglelefteq t(\neg x \trianglelefteq x \vee \neg A).$$

Observação 189. Demonstramos facilmente por indução na complexidade das fórmulas que A_M é uma fórmula limitada e que se A_l é uma fórmula limitada de $\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq}$, então $(A_l)^M \equiv (A_l)_M \equiv A_l$.

De seguida calculamos a M-tradução dos símbolos lógicos definidos.

Proposição 190. *Se* $A^M \equiv \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}A_M(\underline{x},\underline{y})$ *e* $B^M \equiv \tilde{\forall}\underline{x'}\tilde{\exists}\underline{y'}B_M(\underline{x'},\underline{y'})$, *então*

1. $(A \to B)^M \equiv \tilde{\forall}\underline{Y},\underline{x'}\tilde{\exists}\underline{x},\underline{y'}[\tilde{\exists}\underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{x}\neg A_M(\underline{\tilde{x}},\underline{Y}\,\underline{\tilde{x}}) \vee B_M(\underline{x'},\underline{y'})]$;
2. $(A \wedge B)^M \equiv \tilde{\forall}\underline{X},\underline{X'}\tilde{\exists}\underline{Y},\underline{Y'}\tilde{\exists}\underline{\tilde{Y}},\underline{\tilde{Y}'} \trianglelefteq \underline{Y},\underline{Y'}$
$\neg[\tilde{\exists}\underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{X}\,\underline{\tilde{Y}}\,\underline{\tilde{Y}'}\neg A_M(\underline{\tilde{x}},\underline{\tilde{Y}}\,\underline{\tilde{x}}) \vee \tilde{\exists}\underline{\tilde{x}'} \trianglelefteq \underline{X'}\,\underline{\tilde{Y}}\,\underline{\tilde{Y}'}\neg B_M(\underline{\tilde{x}'},\underline{\tilde{Y}'}\,\underline{\tilde{x}'})]$;
3. $(\exists z \trianglelefteq tA)^M \equiv \tilde{\forall}\underline{X}\tilde{\exists}\underline{Y}\tilde{\exists}\underline{\tilde{Y}} \trianglelefteq \underline{Y}\neg\forall z \trianglelefteq t\tilde{\exists}\underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{X}\,\underline{\tilde{Y}}\neg A_M(\underline{\tilde{x}},\underline{\tilde{Y}}\,\underline{\tilde{x}})$;

4. $(\exists z A)^M \equiv \tilde{\forall}\underline{X}\tilde{\exists}w,\underline{Y}\tilde{\exists}\tilde{w},\underline{\tilde{Y}} \trianglelefteq w,\underline{Y}\neg\forall z \trianglelefteq \tilde{w}\tilde{\exists}\underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{X}\tilde{w}\underline{\tilde{Y}}\neg A_M(\underline{\tilde{x}},\underline{\tilde{Y}}\,\underline{\tilde{x}})$.

Demonstração. Trata-se apenas de uma questão de contas. □

As matrizes $A_M(\underline{x},\underline{y})$ são monótonas em $\underline{y}$. Provamos este facto por indução na complexidade das fórmulas. Todos os casos resultam de aplicar simplesmente a hipótese de indução, excepto o caso da negação, no qual é fundamental surgir $\tilde{\exists}\underline{\tilde{x}}\trianglelefteq\underline{x}$ em $(\neg A)_M(\underline{Y},\underline{x})$. É precisamente esta a razão porque pomos $\tilde{\exists}\underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{x}$ na definição da M-tradução.

Lema 191 (da monotonia de M)**.** *Para toda a fórmula A de $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$, temos*

$$\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash \underline{x} \trianglelefteq \underline{x} \wedge \underline{y} \trianglelefteq \underline{\hat{y}} \wedge A_M(\underline{x},\underline{y}) \to A_M(\underline{x},\underline{\hat{y}}).$$

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução na complexidade das fórmulas. Por exemplo, no caso $\neg A$ supomos a fórmula do enunciado e queremos provar

$$\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash \underline{Y} \trianglelefteq \underline{Y} \wedge \underline{x} \trianglelefteq \underline{\hat{x}} \wedge \tilde{\exists}\underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{x}\neg A_M(\underline{\tilde{x}},\underline{Y}\,\underline{\tilde{x}}) \to \tilde{\exists}\underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{\hat{x}}\neg A_M(\underline{\tilde{x}},\underline{Y}\,\underline{\tilde{x}}).$$

Ora, esta implicação resulta facilmente de $\underline{\tilde{x}}\trianglelefteq\underline{x}$, $\underline{x}\trianglelefteq\underline{\hat{x}}$ e da transitividade de $\trianglelefteq$. □

Teorema 192 (da correcção de M)**.** *Sejam A uma fórmula arbitrária de $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$, $\underline{l}$ todas as variáveis livres de A e $A^M \equiv \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}A_M(\underline{x},\underline{y})$. Se $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}+\mathsf{B\text{-}bAC}+\mathsf{bCC}+\mathsf{MAJ} \vdash A$, então existe um uplo de termos fechados monótonos $\underline{t}$ de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$, que pode ser calculado a partir de uma derivação de A, tal que*

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall}\underline{a},\underline{x}\forall\underline{l} \trianglelefteq \underline{a}A_M(\underline{x},\underline{t}\,\underline{a}\,\underline{x}).$$

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução no comprimento das derivações, construindo explicitamente os termos $\underline{t}$.

Quando conveniente, vamos denotar por $\underline{l}_A$ as variáveis de $FV(A)$, por $\underline{l}_{AB}$ as variáveis de $FV(A)\cup FV(B)$, por $\underline{l}_{A\backslash BC}$ as variáveis de $FV(A)\setminus[FV(B)\cup FV(C)]$ e por $\underline{l}_{AB\backslash(C\backslash DE)}$ as variáveis de $[FV(A)\cup FV(B)]\setminus\big[FV(C)\setminus\big(FV(D)\cup FV(E)\big)\big]$. Iremos também usar os índices A, AB, $A\setminus BC$ e $AB\setminus(C\setminus DE)$ para variáveis relacionadas com $\underline{l}_A, \underline{l}_{AB}, \underline{l}_{A\backslash BC}$ e $\underline{l}_{AB\backslash(C\backslash DE)}$. Por exemplo, se $\underline{l}_{AB}\trianglelefteq\underline{a}$, então podemos denotar $\underline{a}$ por $\underline{a}_{AB}$. Analogamente, se substituirmos $\underline{l}_{AB}$ por $\underline{\mathcal{O}}$, então podemos denotar $\underline{\mathcal{O}}$ por $\underline{\mathcal{O}}_{AB}$.

Vejamos que para provar o resultado para equivalências, basta provar para as implicações separadamente. Sejam A e B fórmulas de $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$. Digamos que $A^M \equiv \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}A_M(\underline{x},\underline{y})$ e $B^M \equiv \tilde{\forall}\underline{x}'\tilde{\exists}\underline{y}'A_M(\underline{x}',\underline{y}')$. Vamos provar que se $\underline{q}_{\underline{y}}$ e $\underline{q}_{\underline{y}'}$ forem termos fechados monótonos tais que

$$\begin{aligned}
\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} &\vdash \tilde{\forall}\underline{a}_A,\underline{x}\forall\underline{l}_A \trianglelefteq \underline{a}_A A_M(\underline{x},\underline{q}_{\underline{y}}\,\underline{a}_A\underline{x}), \qquad (11.1)\\
\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} &\vdash \tilde{\forall}\underline{a}_B,\underline{x}'\forall\underline{l}_B \trianglelefteq \underline{a}_B B_M(\underline{x}',\underline{q}_{\underline{y}'}\,\underline{a}_B\underline{x}'),
\end{aligned}$$

então os termos

$$\begin{aligned}\underline{t_Y} &:\equiv \lambda \underline{a}_{AB}, \underline{X}, \underline{X'} \,.\, [\lambda \underline{x} \,.\, (\underline{q_y}\, \underline{a}_A \underline{x})],\\ \underline{t_{Y'}} &:\equiv \lambda \underline{a}_{AB}, \underline{X}, \underline{X'} \,.\, [\lambda \underline{x'} \,.\, (\underline{q_{y'}}\, \underline{a}_B \underline{x'})],\end{aligned}$$

são fechados (óbvio), monótonos (verificamos usando a generalização de $\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}$) e tais que

$$\begin{gathered}\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \\ \tilde{\forall} \underline{a}_{AB}, \underline{X}, \underline{X'} \forall \underline{l}_{AB} \trianglelefteq \underline{a}_{AB} (A \wedge B)_M(\underline{X}, \underline{X'}, \underline{t_Y}\, \underline{a}_{AB} \underline{X}\, \underline{X'}, \underline{t_{Y'}}\, \underline{a}_{AB} \underline{X}\, \underline{X'}),\end{gathered} \tag{11.2}$$

(em particular, se $A \equiv C \to D$ e $B \equiv D \to C$, então este resultado mostra que para garantir que há termos que funcionem para $C \leftrightarrow D$, basta garantir que os há para $C \to D$ e para $D \to C$).
Temos

$$\begin{gathered}(A \wedge B)^M \equiv \tilde{\forall} \underline{X}, \underline{X'} \tilde{\exists} \underline{Y}, \underline{Y'} \tilde{\exists} \underline{\tilde{Y}}, \underline{\tilde{Y}'} \trianglelefteq \underline{Y}, \underline{Y'} \\ \neg[\tilde{\exists} \underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{X}\, \underline{\tilde{Y}}\, \underline{\tilde{Y}'} \neg A_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{\tilde{Y}}\, \underline{\tilde{x}}) \vee \tilde{\exists} \underline{\tilde{x}'} \trianglelefteq \underline{X'}\, \underline{\tilde{Y}}\, \underline{\tilde{Y}'} \neg B_M(\underline{\tilde{x}'}, \underline{\tilde{Y}'}\, \underline{\tilde{x}'})],\end{gathered}$$

logo (11.2) equivale a

$$\begin{gathered}\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall} \underline{a}_{AB}, \underline{X}, \underline{X'} \forall \underline{l}_{AB} \trianglelefteq \underline{a}_{AB} \tilde{\exists} \underline{\tilde{Y}}, \underline{\tilde{Y}'} \trianglelefteq \lambda \underline{x} \,.\, (\underline{q_y}\, \underline{a}_A \underline{x}), \lambda \underline{x'} \,.\, (\underline{q_{y'}}\, \underline{a}_B \underline{x'}) \\ \neg[\tilde{\exists} \underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{X}\, \underline{\tilde{Y}}\, \underline{\tilde{Y}'} \neg A_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{\tilde{Y}}\, \underline{\tilde{x}}) \vee \tilde{\exists} \underline{\tilde{x}'} \trianglelefteq \underline{X'}\, \underline{\tilde{Y}}\, \underline{\tilde{Y}'} \neg B_M(\underline{\tilde{x}'}, \underline{\tilde{Y}'}\, \underline{\tilde{x}'})].\end{gathered} \tag{11.3}$$

Provemos (11.3). Suponhamos $\underline{a}_{AB}, \underline{X}, \underline{X'} \trianglelefteq \underline{a}_{AB}, \underline{X}, \underline{X'}$ e $\underline{l}_{AB} \trianglelefteq \underline{a}_{AB}$. Para testemunhar os primeiros quantificadores existenciais em (11.3) consideremos os termos

$$\begin{aligned}\underline{r_{\tilde{Y}}} &:\equiv \lambda \underline{x} \,.\, (\underline{q_y}\, \underline{a}_A \underline{x}),\\ \underline{r_{\tilde{Y}'}} &:\equiv \lambda \underline{x'} \,.\, (\underline{q_{y'}}\, \underline{a}_B \underline{x'}).\end{aligned}$$

Basta vermos que

$$\tilde{\exists} \underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{X}\, \underline{r_{\tilde{Y}}}\, \underline{r_{\tilde{Y}'}} \neg A_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{r_{\tilde{Y}}}\, \underline{\tilde{x}}) \;\to\; \bot, \tag{11.4}$$

$$\tilde{\exists} \underline{\tilde{x}'} \trianglelefteq \underline{X'}\, \underline{r_{\tilde{Y}}}\, \underline{r_{\tilde{Y}'}} \neg B_M(\underline{\tilde{x}'}, \underline{r_{\tilde{Y}'}}\, \underline{\tilde{x}'}) \;\to\; \bot. \tag{11.5}$$

Vamos só ver (11.4) porque (11.5) é análogo. O antecedente de (11.4) equivale a $\tilde{\exists} \underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{X}\, \underline{r_{\tilde{Y}}}\, \underline{r_{\tilde{Y}'}} \neg A_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{q_y}\, \underline{a}_A \underline{\tilde{x}})$. Daqui e de (11.1) sai $\bot$, como pretendido.

$\underline{\neg A \vee A}$ Temos

$$(\neg A \vee A)^M \equiv \tilde{\forall} \underline{Y}, \underline{x'} \tilde{\exists} \underline{x}, \underline{y'} [\tilde{\exists} \underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{x} \neg A_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\, \underline{\tilde{x}}) \vee A_M(\underline{x'}, \underline{y'})].$$

Os termos

$$\begin{aligned}\underline{t_x} &:\equiv \lambda \underline{a}, \underline{Y}, \underline{x'} \,.\, \underline{x'},\\ \underline{t_{y'}} &:\equiv \lambda \underline{a}, \underline{Y}, \underline{x'} \,.\, (\underline{Y}\, \underline{x'}),\end{aligned}$$

estão nas condições pretendidas.

$\underline{\forall z A(z) \to A(t)}$ Provamos por indução na complexidade das fórmulas que $A^M[t/z] \equiv A[t/z]^M$. Temos

$$[\forall z A(z) \to A(t)]^M \equiv$$
$$\tilde{\forall}\underline{Y}, \underline{x'}\tilde{\exists} w, \underline{x}, \underline{y'}\big[\tilde{\exists}\tilde{w}, \underline{\tilde{x}} \trianglelefteq w, \underline{x} \neg\forall z \trianglelefteq \tilde{w} A_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\tilde{w}\underline{\tilde{x}}, z) \vee A_M\big(\underline{x'}, \underline{y'}, t(\underline{l})\big)\big]$$

Seja $\tilde{t}$ um majorante do termo fechado $\lambda \underline{l} \,.\, t(\underline{l})$. Portanto $\tilde{t} \trianglelefteq \tilde{t}$ e $\underline{l} \trianglelefteq \underline{a} \to t(\underline{l}) \trianglelefteq \tilde{t}\underline{a}$. Vejamos que os termos

$$\begin{array}{rcl} t_w & :\equiv & \lambda \underline{a}, \underline{Y}, \underline{x'} \,.\, (\tilde{t}\underline{a}), \\ \underline{t_x} & :\equiv & \lambda \underline{a}, \underline{Y}, \underline{x'} \,.\, \underline{x'}, \\ \underline{t_{y'}} & :\equiv & \lambda \underline{a}, \underline{Y}, \underline{x'} \,.\, [\underline{Y}(\tilde{t}\underline{a})\underline{x'}], \end{array}$$

estão nas condições pretendidas, isto é, são fechados (óbvio), monótonos (verificamos usando a generalização de $\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}$ e atendendo $\tilde{t} \trianglelefteq \tilde{t}$) e verificam

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}\tilde{\forall}\underline{Y}, \underline{x'}\forall \underline{l} \trianglelefteq \underline{a}$$
$$\big[\tilde{\exists}\tilde{w}, \underline{\tilde{x}} \trianglelefteq t_w\underline{a}\underline{Y}\underline{x'}, \underline{t_x}\underline{a}\underline{Y}\underline{x'} \neg\forall z \trianglelefteq \tilde{w} A_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\tilde{w}\underline{\tilde{x}}, z) \vee A_M\big(\underline{x'}, \underline{t_{y'}}\underline{a}\underline{Y}\underline{x'}, t(\underline{l})\big)\big],$$

o que com estes termos equivale a

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}\tilde{\forall}\underline{Y}, \underline{x'}\forall \underline{l} \trianglelefteq \underline{a}$$
$$\big[\tilde{\exists}\tilde{w}, \underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \tilde{t}\underline{a}, \underline{x'} \neg\forall z \trianglelefteq \tilde{w} A_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\tilde{w}\underline{\tilde{x}}, z) \vee A_M\big(\underline{x'}, \underline{Y}(\tilde{t}\underline{a})\underline{x'}, t(\underline{l})\big)\big].$$

Suponhamos $\underline{a}, \underline{Y}, \underline{x'} \trianglelefteq \underline{a}, \underline{Y}, \underline{x'}$, $\underline{l} \trianglelefteq \underline{a}$ e $\neg\tilde{\exists}\tilde{w}, \underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \tilde{t}\underline{a}, \underline{x'} \neg\forall z \trianglelefteq \tilde{w} A_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\tilde{w}\underline{\tilde{x}}, z)$, isto é, $\tilde{\forall}\tilde{w}, \underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \tilde{t}\underline{a}, \underline{x'}\forall z \trianglelefteq \tilde{w} A_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\tilde{w}\underline{\tilde{x}}, z)$, e provemos $A_M\big(\underline{x'}, \underline{Y}(\tilde{t}\underline{a})\underline{x'}, t(\underline{l})\big)$. Basta pôr $\tilde{w} = \tilde{t}\underline{a}$, $\underline{\tilde{x}} = \underline{x'}$ e $z = t(\underline{l})$ (podemos tomar este z porque $t(\underline{l}) \trianglelefteq \tilde{t}\underline{a}$).

$\underline{A \;\Rightarrow\; B \vee A}$ Temos

$$\begin{array}{rcl} A^M & \equiv & \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y} A_M(\underline{x}, \underline{y}), \\ (B \vee A)^M & \equiv & \tilde{\forall}\underline{x'}, \underline{x}\tilde{\exists}\underline{y'}, \underline{y}[B_M(\underline{x'}, \underline{y'}) \vee A_M(\underline{x}, \underline{y})]. \end{array}$$

Por hipótese de indução, existem termos fechados monótonos $\underline{q}$ de tais que

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}_A, \underline{x}\forall \underline{l}_A \trianglelefteq \underline{a}_A A_M(\underline{x}, \underline{q}\underline{a}_A\underline{x}).$$

Os termos

$$\begin{array}{rcl} \underline{t_{y'}} & :\equiv & \lambda \underline{a}_{AB}, \underline{x'}, \underline{x} \,.\, \underline{\mathcal{O}}, \\ \underline{t_y} & :\equiv & \lambda \underline{a}_{AB}, \underline{x'}, \underline{x} \,.\, (\underline{q}\underline{a}_A\underline{x}), \end{array}$$

(onde o uplo $\underline{\mathcal{O}}$ tem tipo apropriado) estão nas condições pretendidas.

$\underline{A \vee A \ \Rightarrow \ A}$ Temos

$$\begin{array}{rcl} A^M & \equiv & \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}A_M(\underline{x},\underline{y}), \\ (A \vee A)^M & \equiv & \tilde{\forall}\underline{x},\underline{x}'\tilde{\exists}\underline{y},\underline{y}'[A_M(\underline{x},\underline{y}) \vee A_M(\underline{x}',\underline{y}')]. \end{array}$$

Por hipótese de indução, existem termos fechados monótonos $\underline{q}_{\underline{y}}$ e $\underline{q}_{\underline{y}'}$ tais que

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall}\underline{a},\underline{x},\underline{x}'\forall\underline{l} \trianglelefteq \underline{a}[A_M(\underline{x},\underline{q}_{\underline{y}}\underline{a}\,\underline{x}\,\underline{x}') \vee A_M(\underline{x}',\underline{q}_{\underline{y}'}\underline{a}\,\underline{x}\,\underline{x}')].$$

Pondo $\underline{x}' = \underline{x}$ vem

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall}\underline{a},\underline{x}\forall\underline{l} \trianglelefteq \underline{a}[A_M(\underline{x},\underline{q}_{\underline{y}}\underline{a}\,\underline{x}\,\underline{x}) \vee A_M(\underline{x},\underline{q}_{\underline{y}'}\underline{a}\,\underline{x}\,\underline{x})].$$

Pelo lema da monotonia e pelo lema 134 verificamos que os termos

$$\underline{t} :\equiv \lambda\underline{a},\underline{x}\,.\,\max(\underline{q}_{\underline{y}}\underline{a}\,\underline{x}\,\underline{x},\underline{q}_{\underline{y}'}\underline{a}\,\underline{x}\,\underline{x})$$

estão nas condições pretendidas.

$\underline{A \vee (B \vee C) \ \Rightarrow (A \vee B) \vee C}$ Temos

$$\begin{array}{rcl} [A \vee (B \vee C)]^M & \equiv & \tilde{\forall}\underline{x},\underline{x}',\underline{x}''\tilde{\exists}\underline{y},\underline{y}',\underline{y}''\big[A_M(\underline{x},\underline{y}) \vee \big(B_M(\underline{x}',\underline{y}') \vee C_M(\underline{x}'',\underline{y}'')\big)\big], \\ [(A \vee B) \vee C]^M & \equiv & \tilde{\forall}\underline{x},\underline{x}',\underline{x}''\tilde{\exists}\underline{y},\underline{y}',\underline{y}''\big[\big(A_M(\underline{x},\underline{y}) \vee B_M(\underline{x}',\underline{y}')\big) \vee C_M(\underline{x}'',\underline{y}'')\big]. \end{array}$$

É fácil verificar que os mesmos termos que, por hipótese de indução, servem para a $[A \vee (B \vee C)]^M$, também servem para $[(A \vee B) \vee C]^M$.

$\underline{A \vee B, \neg A \vee C \ \Rightarrow B \vee C}$ Temos

$$\begin{array}{rcl} (A \vee B)^M & \equiv & \tilde{\forall}\underline{x},\underline{x}'\tilde{\exists}\underline{y},\underline{y}'[A_M(\underline{x},\underline{y},\underline{l}_{A\backslash BC}) \vee B_M(\underline{x}',\underline{y}')], \\ (\neg A \vee C)^M & \equiv & \tilde{\forall}\underline{Y},\underline{x}''\tilde{\exists}\underline{x},\underline{y}''[\tilde{\exists}\underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{x}\neg A_M(\underline{\tilde{x}},\underline{Y}\,\underline{\tilde{x}},\underline{l}_{A\backslash BC}) \vee C_M(\underline{x}'',\underline{y}'')], \\ (B \vee C)^M & \equiv & \tilde{\forall}\underline{x}',\underline{x}''\tilde{\exists}\underline{y}',\underline{y}''[B_M(\underline{x}',\underline{y}') \vee C_M(\underline{x}'',\underline{y}'')]. \end{array}$$

Por hipótese de indução, existem termos fechados monótonos $\underline{q}_{\underline{y}},\underline{q}_{\underline{y}'}$ e $\underline{r}_{\underline{x}},\underline{r}_{\underline{y}''}$ tais que

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} & \vdash & \tilde{\forall}\underline{a}_{AB},\underline{x},\underline{x}'\forall\underline{l}_{AB} \trianglelefteq \underline{a}_{AB} \\ & & [A_M(\underline{x},\underline{q}_{\underline{y}}\underline{a}_{AB}\underline{x}\,\underline{x}',\underline{l}_{A\backslash BC}) \vee B_M(\underline{x}',\underline{q}_{\underline{y}'}\underline{a}_{AB}\underline{x}\,\underline{x}')], \end{array} \tag{11.6}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} & \vdash & \tilde{\forall}\underline{a}_{AC},\underline{Y},\underline{x}''\forall\underline{l}_{AC} \trianglelefteq \underline{a}_{AC}[\tilde{\exists}\underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{r}_{\underline{x}}\underline{a}_{AC}\underline{Y}\,\underline{x}''\neg A_M(\underline{\tilde{x}},\underline{Y}\,\underline{\tilde{x}},\underline{l}_{A\backslash BC}) \vee \\ & & C_M(\underline{x}'',\underline{r}_{\underline{y}''}\underline{a}_{AC}\underline{Y}\,\underline{x}'')]. \end{array} \tag{11.7}$$

Para simplificar a notação, no resto desta alínea onde aparecer

$$\underline{q}_{\underline{y}}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}, \qquad \underline{q}_{\underline{y}'}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}, \qquad \underline{r}_{\underline{x}}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a}, \qquad \underline{r}_{\underline{y}''}\underline{\mathcal{O}}\,\underline{a},$$

devemos entender, respectivamente,

$\underline{q}_{\underline{y}}\underline{\mathcal{O}}_{A\backslash BC}\underline{a}_{AB\backslash(A\backslash BC)}$, $\underline{q}_{\underline{y}'}\underline{\mathcal{O}}_{A\backslash BC}\underline{a}_{AB\backslash(A\backslash BC)}$, $\underline{r}_{\underline{x}}\underline{\mathcal{O}}_{A\backslash BC}\underline{a}_{AC\backslash(A\backslash BC)}$, $\underline{r}_{\underline{y}''}\underline{\mathcal{O}}_{A\backslash BC}\underline{a}_{AC\backslash(A\backslash BC)}$, isto é, em $\underline{q}_{\underline{y}}\underline{a}_{AB}$, $\underline{q}_{\underline{y}'}\underline{a}_{AB}$, $\underline{r}_{\underline{x}}\underline{a}_{AC}$ e $\underline{r}_{\underline{y}''}\underline{a}_{AC}$ estamos a substituir os $\underline{a}_{A\backslash BC}$ (que supomos serem as primeira variáveis dos uplos $\underline{a}_{AB}$ e $\underline{a}_{AC}$) por $\underline{\mathcal{O}}_{A\backslash BC}$ e a não alterar as restantes variáveis desses uplos. Seja $\underline{p} :\equiv \lambda\underline{x}\,.\,(\underline{q}_{\underline{y}}\underline{\mathcal{O}a}\underline{x}\underline{x}')$. Vejamos que os termos

$$\begin{aligned}\underline{t}_{\underline{y}'} &:\equiv \lambda\underline{a}_{BC},\underline{x}',\underline{x}''\,.\,[\underline{q}_{\underline{y}'}\underline{\mathcal{O}}\underline{a}(\underline{r}_{\underline{x}}\underline{\mathcal{O}}\underline{a}\underline{p}\underline{x}'')\underline{x}'],\\ \underline{t}_{\underline{y}''} &:\equiv \lambda\underline{a}_{BC},\underline{x}',\underline{x}''\,.\,[\underline{r}_{\underline{y}''}\underline{\mathcal{O}}\underline{a}\underline{p}\underline{x}''],\end{aligned}$$

isto é, são fechados (óbvio), monótonos (resulta da monotonia de $\underline{q}_{\underline{y}}$, $\underline{q}_{\underline{y}'}$, $\underline{r}_{\underline{x}}$, $\underline{r}_{\underline{y}''}$, $\underline{p}$ e $\underline{\mathcal{O}}$) e verificam

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}_{BC},\underline{x}',\underline{x}''\forall\underline{l}_{BC} \trianglelefteq \underline{a}_{BC}[B_M(\underline{x}',\underline{t}_{\underline{y}'}\underline{a}_{BC}\underline{x}'\underline{x}'') \vee C_M(\underline{x}'',\underline{t}_{\underline{y}''}\underline{a}_{BC}\underline{x}'\underline{x}'')],$$

o que com estes termos equivale a

$$\begin{gathered}\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}_{BC},\underline{x}',\underline{x}''\forall\underline{l}_{BC} \trianglelefteq \underline{a}_{BC}\\ \big[B_M\big(\underline{x}',\underline{q}_{\underline{y}'}\underline{\mathcal{O}}\underline{a}(\underline{r}_{\underline{x}}\underline{\mathcal{O}}\underline{a}\underline{p}\underline{x}'')\underline{x}'\big) \vee C_M(\underline{x}'',\underline{r}_{\underline{y}''}\underline{\mathcal{O}}\underline{a}\underline{p}\underline{x}'')\big].\end{gathered}$$

Suponhamos $\underline{a}_{BC},\underline{x}',\underline{x}'' \trianglelefteq \underline{a}_{BC},\underline{x}',\underline{x}''$, $\underline{l}_{BC} \trianglelefteq \underline{a}_{BC}$, $\neg C_M(\underline{x}'',\underline{r}_{\underline{y}''}\underline{\mathcal{O}}\underline{a}\underline{p}\underline{x}'')$ e provemos $B_M\big(\underline{x}',\underline{q}_{\underline{y}'}\underline{\mathcal{O}}\underline{a}(\underline{r}_{\underline{x}}\underline{\mathcal{O}}\underline{a}\underline{p}\underline{x}'')\underline{x}'\big)$. Pondo $\underline{a}_{A\backslash BC} = \underline{l}_{A\backslash BC} = \underline{\mathcal{O}}_{A\backslash BC}$ e $\underline{Y} = \underline{p}$ em (11.7) e atendendo às nossas suposições sai

$$\tilde{\exists}\underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{r}_{\underline{x}}\underline{\mathcal{O}}\underline{a}\underline{p}\underline{x}''\neg A_M(\underline{\tilde{x}},\underline{q}_{\underline{y}}\underline{\mathcal{O}}\underline{a}\underline{\tilde{x}}\underline{x}',\underline{\mathcal{O}}_{A\backslash BC}).$$

Daqui, pondo $\underline{a}_{A\backslash BC} = \underline{l}_{A\backslash BC} = \underline{\mathcal{O}}_{A\backslash BC}$ e $\underline{x} = \underline{\tilde{x}}$ em (11.6) sai

$$\tilde{\exists}\underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{r}_{\underline{x}}\underline{\mathcal{O}}\underline{a}\underline{p}\underline{x}''B_M(\underline{x}',\underline{q}_{\underline{y}'}\underline{\mathcal{O}}\underline{a}\underline{\tilde{x}}\underline{x}').$$

Aplicamos agora o lema da monotonia de M: como $\underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{r}_{\underline{x}}\underline{\mathcal{O}a}\underline{p}\underline{x}''$, então $\underline{q}_{\underline{y}'}\underline{\mathcal{O}a}\underline{\tilde{x}}\underline{x}' \trianglelefteq \underline{q}_{\underline{y}'}\underline{\mathcal{O}}\underline{a}(\underline{r}_{\underline{x}}\underline{\mathcal{O}}\underline{a}\underline{p}\underline{x}'')\underline{x}'$, logo temos $B_M\big(\underline{x}',\underline{q}_{\underline{y}'}\underline{\mathcal{O}}\underline{a}(\underline{r}_{\underline{x}}\underline{\mathcal{O}}\underline{a}\underline{p}\underline{x}'')\underline{x}'\big)$, como pretendido.

$\underline{A \vee B \ \Rightarrow\ \forall z A \vee B}$ Temos

$$\begin{aligned}(A \vee B)^M &\equiv \tilde{\forall}\underline{x},\underline{x}'\tilde{\exists}\underline{y},\underline{y}'[A_M(\underline{x},\underline{y}) \vee B_M(\underline{x}',\underline{y}')],\\ (\forall z A \vee B)^M &\equiv \tilde{\forall}w,\underline{x},\underline{x}'\tilde{\exists}\underline{y},\underline{y}'[\forall z \trianglelefteq w A_M(\underline{x},\underline{y}) \vee B_M(\underline{x}',\underline{y}')].\end{aligned}$$

Vejamos o caso $z \in FV(A)$. Sejam $\underline{l}$ as variáveis de $FV(\forall z A \vee B)$ (logo $\underline{l}, z$ são as variáveis de $FV(A \vee B)$). Por hipótese de indução, existem termos fechados monótonos $\underline{q}_{\underline{y}}$ e $\underline{q}_{\underline{y}'}$ tais que

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall}\underline{a},b,\underline{x},\underline{x}'\forall\underline{l},z \trianglelefteq \underline{a},b[A_M(\underline{x},\underline{q}_{\underline{y}}\underline{a}b\underline{x}\underline{x}') \vee B_M(\underline{x}',\underline{q}_{\underline{y}'}\underline{a}b\underline{x}\underline{x}')].$$

Os mesmos termos $\underline{q}_{\underline{y}}$ e $\underline{q}_{\underline{y}'}$ estão nas condições pretendidas porque (usando as regras de prenifixação) verificam

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall}\underline{a},w,\underline{x},\underline{x}'\forall\underline{l} \trianglelefteq \underline{a}[\forall z \trianglelefteq w A_M(\underline{x},\underline{q}_{\underline{y}}\underline{a}w\underline{x}\underline{x}') \vee B_M(\underline{x}',\underline{q}_{\underline{y}'}\underline{a}w\underline{x}\underline{x}')].$$

Vejamos o caso $z \notin FV(A)$. Sejam $\underline{l}$ as variáveis de $FV(A \vee B) = FV(\forall z A \vee B)$. Por hipótese de indução, existem termos fechados monótonos $\underline{q_y}$ e $\underline{q_{y'}}$ tais que

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall} \underline{a}, \underline{x}, \underline{x'} \forall \underline{l} \trianglelefteq \underline{a}[A_M(\underline{x}, \underline{q_y}\,\underline{a}\,\underline{x}\,\underline{x'}) \vee B_M(\underline{x'}, \underline{q_{y'}}\,\underline{a}\,\underline{x}\,\underline{x'})].$$

Os termos

$$\begin{aligned} \underline{t_y} &:\equiv \lambda \underline{a}, w, \underline{x}, \underline{x'} \,.\, (\underline{q_y}\,\underline{a}\,\underline{x}\,\underline{x'}), \\ \underline{t_{y'}} &:\equiv \lambda \underline{a}, w, \underline{x}, \underline{x'} \,.\, (\underline{q_{y'}}\,\underline{a}\,\underline{x}\,\underline{x'}), \end{aligned}$$

estão nas condições pretendidas porque são fechados (óbvio), monótonos (verificamos usando a generalização de $\mathsf{RL}_\trianglelefteq$ e atendendo a que $\underline{q_y}$ e $\underline{q_{y'}}$ são monótonos) e verificam (basta introduzir as quantificações inertes $\tilde{\forall} w$ e $\forall z \trianglelefteq w$)

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall} \underline{a}, w, \underline{x}, \underline{x'} \forall \underline{l} \trianglelefteq \underline{a}[\forall z \trianglelefteq w A_M(\underline{x}, \underline{t_y}\,\underline{a} w \underline{x}\,\underline{x'}) \vee B_M(\underline{x'}, \underline{t_{y'}}\,\underline{a} w \underline{x}\,\underline{x'})].$$

$\underline{\mathsf{RL}_\trianglelefteq}$ Este caso é análogo ao feito na demonstração do teorema da correcção de B.

$\underline{\mathsf{M}_1,\ \mathsf{M}_2,\ \Pi,\ \Sigma,\ \underline{R},\ \text{axiomas de } =_0 \text{ e de } S}$ Todas as fórmulas que surgem nestas regras e axiomas são limitadas, pelo que coincidem com as suas M-traduções. Tal torna trivial verificar o resultado para estas regras e axiomas.

$\underline{\mathsf{IR}}$ Numa derivação, uma aplicação de IR a uma fórmula $A(z)$ tal que $z \notin FV\big(A(z)\big)$ pode ser sempre eliminada porque essa aplicação requeria que tivéssemos derivado $A(0)$ e permitia derivar $A(z)$. Acontece que $A(0) \equiv A(z)$ (porque $z \notin FV\big(A(z)\big)$), pelo que nem era preciso aplicarmos IR para derivar $A(z)$. Assim, podemos supor que quando aplicamos IR a $A(z)$ temos $z \in FV\big(A(z)\big)$.
Temos

$$\begin{aligned} A(0)^M &\equiv \tilde{\forall} \underline{x} \tilde{\exists} \underline{y} A_M(\underline{x}, \underline{y}, 0), \\ [A(z) \to A(Sz)]^M &\equiv \tilde{\forall} \underline{Y}, \underline{x'} \tilde{\exists} \underline{x}, \underline{y'} [\tilde{\exists} \underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{x} \neg A_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\,\underline{\tilde{x}}, z) \vee A_M(\underline{x'}, \underline{y'}, Sz)], \\ A(z)^M &\equiv \tilde{\forall} \underline{x} \tilde{\exists} \underline{y} A_M(\underline{x}, \underline{y}, z). \end{aligned}$$

Sejam $\underline{l}$ as variáveis de $FV\big(A(0)\big)$ (logo $\underline{l}, z$ são as variáveis de $FV\big(A(z) \to A(Sz)\big) = FV\big(A(z)\big)$). Por hipótese de indução, existem termos fechados monótonos $\underline{q}$ e $\underline{r_x}, \underline{r_{y'}}$ tais que

$$\begin{aligned} \mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} &\vdash \tilde{\forall} \underline{a}, \underline{x} \forall \underline{l} \trianglelefteq \underline{a} A_M(\underline{x}, \underline{q}\,\underline{a}\,\underline{x}, 0), && (11.8) \\ \mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} &\vdash \tilde{\forall} \underline{a}, b, \underline{Y}, \underline{x'} \forall \underline{l}, z \trianglelefteq \underline{a}, b[\tilde{\exists} \underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{r_x}\,\underline{a} b \underline{Y}\,\underline{x'} \neg A_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\,\underline{\tilde{x}}, z) \vee \\ &\qquad A_M(\underline{x'}, \underline{r_{y'}}\,\underline{a} b \underline{Y}\,\underline{x'}, Sz)]. && (11.9) \end{aligned}$$

Seja

$$\underline{p} :\equiv \lambda z, \underline{a}, b \,.\, \big[\underline{R} z(\underline{q}\,\underline{a}) \lambda \underline{Y}, z \,.\, \max\big(\underline{Y}, \underline{r_{y'}}\,\underline{a} b \underline{Y}\big)\big].$$

No que se segue, para manejarmos de forma mais expedita os termos $\underline{p}$, convém termos em mente que para toda a fórmula $B(\underline{w})$ de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ temos

$$\begin{aligned} \mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} &\vdash B(\underline{p} 0 \underline{a} b \underline{x}) \leftrightarrow B(\underline{q}\,\underline{a}\,\underline{x}), \\ \mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} &\vdash B\big(\underline{p}(Sz)\underline{a} b \underline{x}\big) \leftrightarrow B\Big(\max\big(\underline{p} z \underline{a} b \underline{x}, \underline{r_{y'}}\,\underline{a} b (\underline{p} z \underline{a} b) \underline{x}\big)\Big). \end{aligned}$$

Vejamos que

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}, b\forall\underline{l}, z \trianglelefteq \underline{a}, b\tilde{\forall}\underline{x}A_M(\underline{x}, \underline{p}z\underline{a}b\underline{x}, z). \tag{11.10}$$

Para tal, supomos $\underline{a}, b \trianglelefteq \underline{a}, b, \underline{l}, z \trianglelefteq \underline{a}, b$ e provamos $\tilde{\forall}\underline{x}A_M(\underline{x}, \underline{p}z\underline{a}b\underline{x}, z)$ por indução em z. O caso base resulta facilmente de (11.8). Vejamos o passo de indução. Suponhamos $\tilde{\forall}\underline{x}A_M(\underline{x}, \underline{p}z\underline{a}b\underline{x}, z)$. Pondo $\underline{Y} = \underline{p}z\underline{a}b$ em (11.9) (podemos escolher este Y porque ele é monótono como veremos adiante) vem $\tilde{\forall}\underline{x}A_M\big(\underline{x}, \underline{r}_{\underline{y}'}\underline{a}b(\underline{p}z\underline{a}b)\underline{x}, Sz\big)$. Pelo lema da monotonia de M e pelo lema 149 vem

$$\tilde{\forall}\underline{x}A_M\Big(\underline{x}, \max\big(\underline{p}z\underline{a}b\underline{x}, \underline{r}_{\underline{y}'}\underline{a}b(\underline{p}z\underline{a}b)\underline{x}\big), Sz\Big),$$

isto é, $[\tilde{\forall}\underline{x}A_M(\underline{x}, \underline{p}z\underline{a}b\underline{x}, z)][Sz/z]$, como pretendido. Fica provado (11.10).
Pelo lema da monotonia e pela monotonia de max (lema 149), de (11.10) vem

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}, b, \underline{x}\forall\underline{l}, z \trianglelefteq \underline{a}, bA_M(\underline{x}, \underline{p}b\underline{a}b\underline{x}, z). \tag{11.11}$$

(substituímos z por b em $\underline{p}z\underline{a}b\underline{x}$). Então os termos

$$\underline{t} :\equiv \lambda\underline{a}, b, \underline{x}\,.\,(\underline{p}b\underline{a}b\underline{x})$$

verificam

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}, b, \underline{x}\forall\underline{l}, z \trianglelefteq \underline{a}, bA_M(\underline{x}, \underline{t}\underline{a}b\underline{x}, z).$$

É óbvio que são fechados.
Quanto à monotonia destes termos, começamos por demonstrar que $\underline{p}$ é monótono. Para tal, provamos por dupla indução

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash B(z, z') :\equiv z \trianglelefteq_0 z' \wedge \underline{a} \trianglelefteq \underline{a'} \wedge \underline{b} \trianglelefteq \underline{b'} \to \underline{p}z\underline{a}b \trianglelefteq \underline{p}z'\underline{a'}b'.$$

1. $\underline{\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash B(0, z')}$ Demonstramos $B(0, z')$ por indução em z'. O case base é derivável porque o seu consequente equivale a $\underline{q}\underline{a} \trianglelefteq \underline{q}\underline{a'}$, que resulta por M_2 da monotonia de $\underline{q}$. O passo de indução resulta do lema 149 e da monotonia de $\underline{r}_{\underline{y}'}$.

2. $\underline{\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash B(z, 0)}$ Demonstramos $B(z, 0)$ por indução em z. O caso base é o mesmo da alínea anterior. Para o passo de indução basta notar que o antecedente de $B(Sz, 0)$ é "falso" devido à condição $Sz \leq_0 0$ (pois dela pelo lema 130 vem $Sz =_0 0$, contrariando o axioma $Sz \neq_0 0$).

3. $\underline{\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} \vdash B(z, z') \to B(Sz, Sz')}$ Suponhamos $B(z, z')$ e o antecedente de $B(Sz, Sz')$. Neste antecedente, a condição $Sz \leq_0 Sz'$ equivale a $z \leq_0 z'$ (pelo lema 130), pelo que o antecedente de $B(Sz, Sz')$ é equivalente ao antecedente de $B(z, z')$. Portanto temos o consequente de $B(z, z')$, $\underline{p}z\underline{a}b \trianglelefteq \underline{p}z'\underline{a'}b'$. Daqui pela monotonia de max e de $\underline{r}_{\underline{y}'}$ sai o consequente de $B(Sz, Sz')$.

Pela generalização de $\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}$ vem $\underline{p} \trianglelefteq \underline{p}$, donde é fácil provar que os termos $\underline{t}$ são monótonos.

$\underline{\mathsf{B}_{\forall}}$ Tratemos da implicação da esquerda para a direita de $\mathsf{B}_{\forall}$. Temos

$$[\forall z \trianglelefteq qA \to \forall z(z \trianglelefteq q \to A)]^M \equiv$$
$$\tilde{\forall}\underline{Y}, w, \underline{x}'\tilde{\exists}\underline{x}, \underline{y}'\big[\tilde{\exists}\underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{x}\neg\forall z \trianglelefteq qA_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\,\underline{\tilde{x}}) \vee \forall z \trianglelefteq w\big(\neg z \trianglelefteq q \vee A_M(\underline{x}', \underline{y}')\big)\big].$$

Vejamos que os termos

$$\begin{aligned} \underline{t}_{\underline{x}} &\equiv \lambda\underline{a}, \underline{Y}, w, \underline{x}' . \underline{x}', \\ \underline{t}_{\underline{y}'} &\equiv \lambda\underline{a}, \underline{Y}, w, \underline{x}' . (\underline{Y}\,\underline{x}'), \end{aligned}$$

estão nas condições pretendidas, isto é, são fechados (óbvio), monótonos (verificamos usando a generalização de $\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}$) e verificam

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}, \underline{Y}, w, \underline{x}'\forall\underline{l} \trianglelefteq \underline{a}$$
$$\big[\tilde{\exists}\underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{t}_{\underline{x}}\underline{a}\underline{Y}w\underline{x}'\neg\forall z \trianglelefteq qA_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\,\underline{\tilde{x}}) \vee \forall z \trianglelefteq w\big(\neg z \trianglelefteq q \vee A_M(\underline{x}', \underline{t}_{\underline{y}'}\underline{a}\underline{Y}w\underline{x})\big)\big],$$

o que com estes termos equivale a

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}, \underline{Y}, w, \underline{x}'\forall\underline{l} \trianglelefteq \underline{a}$$
$$\big[\tilde{\exists}\underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{x}'\neg\forall z \trianglelefteq qA_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\,\underline{\tilde{x}}) \vee \forall z \trianglelefteq w\big(\neg z \trianglelefteq q \vee A_M(\underline{x}', \underline{Y}\,\underline{x}')\big)\big].$$

Suponhamos $\underline{a}, \underline{Y}, w, \underline{x}' \trianglelefteq \underline{a}, \underline{Y}, w, \underline{x}'$, $\underline{l} \trianglelefteq \underline{a}$ e $\neg\tilde{\exists}\underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{x}'\neg\forall z \trianglelefteq qA_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\,\underline{\tilde{x}})$, isto é, $\tilde{\forall}\underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{x}'\forall z \trianglelefteq qA_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\underline{\tilde{x}})$, e provemos $\forall z \trianglelefteq w\big(\neg z \trianglelefteq q \vee A_M(\underline{x}', \underline{Y}\underline{x}')\big)$. Pondo $\underline{\tilde{x}} = \underline{x}'$ vem $\forall z\big(\neg z \trianglelefteq q \vee A_M(\underline{x}', \underline{Y}\underline{x}')\big)$, pelo que em particular temos $\forall z \trianglelefteq w\big(\neg z \trianglelefteq q \vee A_M(\underline{x}', \underline{Y}\underline{x}')\big)$, como pretendido.

Tratemos da implicação da direita para a esquerda de $\mathsf{B}_{\forall}$. Temos

$$[\forall z(z \trianglelefteq q \to A) \to \forall z \trianglelefteq qA]^M \equiv \tilde{\forall}\underline{Y}, \underline{x}'\tilde{\exists}w, \underline{x}, \underline{y}'$$
$$\big[\tilde{\exists}\tilde{w}, \underline{\tilde{x}} \trianglelefteq w, \underline{x}\neg\forall z \trianglelefteq \tilde{w}\big(\neg z \trianglelefteq q \vee A_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\tilde{w}\underline{\tilde{x}})\big) \vee \forall z \trianglelefteq qA_M(\underline{x}', \underline{y}')\big].$$

Seja $\tilde{q}$ um majorante do termo fechado $\lambda\underline{l} . q(\underline{l})$. Temos $\tilde{q} \trianglelefteq \tilde{q}$ e se $\underline{l} \trianglelefteq \underline{a} \to q(\underline{l}) \trianglelefteq \tilde{q}\underline{a}$. Vejamos que os termos

$$\begin{aligned} t_w &:\equiv \lambda\underline{a}, \underline{Y}, \underline{x}' . (\tilde{q}\underline{a}), \\ \underline{t}_{\underline{x}} &:\equiv \lambda\underline{a}, \underline{Y}, \underline{x}' . \underline{x}', \\ \underline{t}_{\underline{y}'} &:\equiv \lambda\underline{a}, \underline{Y}, \underline{x}' . [\underline{Y}(\tilde{q}\underline{a})\underline{x}'], \end{aligned}$$

estão nas condições pretendidas, isto é, são fechados (óbvio), monótonos (verificamos usando a generalização de $\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}$ e atendendo a $\tilde{q} \trianglelefteq \tilde{q}$) e verificam

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}, \underline{Y}, \underline{x}'\forall\underline{l} \trianglelefteq \underline{a}$$
$$\big[\tilde{\exists}\tilde{w}, \underline{\tilde{x}} \trianglelefteq t_w\underline{a}\underline{Y}\,\underline{x}', \underline{t}_{\underline{x}}\underline{a}\underline{Y}\,\underline{x}'\neg\forall z \trianglelefteq \tilde{w}\big(\neg z \trianglelefteq q \vee A_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\tilde{w}\underline{\tilde{x}})\big) \vee$$
$$\forall z \trianglelefteq qA_M(\underline{x}', \underline{t}_{\underline{y}'}\underline{a}\underline{Y}\,\underline{x}')\big],$$

o que com estes termos equivale a

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall}\underline{a}, \underline{Y}, \underline{x}'\forall \underline{l} \trianglelefteq \underline{a}$$
$$\big[\underbrace{\tilde{\exists}\tilde{w}, \underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \tilde{q}\underline{a}, \underline{x}'\neg\forall z \trianglelefteq \tilde{w}\big(\neg z \trianglelefteq q \vee A_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\tilde{w}\underline{\tilde{x}})\big)}_{\equiv:B} \vee \underbrace{\forall z \trianglelefteq q A_M\big(\underline{x}', \underline{Y}(\tilde{q}\underline{a})\underline{x}'\big)}_{\equiv:C}\big].$$

Suponhamos $\underline{a}, \underline{Y}, \underline{x}' \trianglelefteq \underline{a}, \underline{Y}, \underline{x}'$, $\underline{l} \trianglelefteq \underline{a}$ e $\neg B$, isto é,

$$\tilde{\forall}\tilde{w}, \underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \tilde{q}\underline{a}, \underline{x}'\forall z \trianglelefteq \tilde{w}\big(\neg z \trianglelefteq q \vee A_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\tilde{w}\underline{\tilde{x}})\big),$$

e provemos C. Basta tomar $\tilde{w} = \tilde{q}\underline{a}$ e $\underline{\tilde{x}} = \underline{x}'$ e atender a que se $z \trianglelefteq q$, então $z \trianglelefteq \tilde{w}$ (porque $q \trianglelefteq \tilde{q}\underline{a}$).

<u>B-bAC</u> Temos

$$\begin{array}{rcl}
(\neg\forall x\exists y A_l)^M & \equiv & \tilde{\forall}U\tilde{\exists}v\tilde{\exists}\tilde{v} \trianglelefteq v\neg\forall x \trianglelefteq \tilde{v}\tilde{\exists}\tilde{u} \trianglelefteq U\tilde{v}\neg\forall y \trianglelefteq \tilde{u}\neg A_l \\
& \leftrightarrow & \tilde{\forall}U\tilde{\exists}v\neg\tilde{\forall}\tilde{v} \trianglelefteq v\forall x \trianglelefteq \tilde{v}\exists y \trianglelefteq U\tilde{v}A_l, \\
(\tilde{\exists}Y\tilde{\forall}z\forall x \trianglelefteq z\exists y \trianglelefteq YzA_l)^M & \equiv & \tilde{\forall}W\tilde{\exists}V\tilde{\exists}\tilde{V} \trianglelefteq V\neg\forall Y \trianglelefteq \tilde{V}\tilde{\exists}\hat{w} \trianglelefteq W\tilde{V} \\
& & \neg\neg[\neg Y \trianglelefteq Y \vee \tilde{\exists}\tilde{w} \trianglelefteq \hat{w}\neg\forall z \trianglelefteq \tilde{w} \\
& & (\neg z \trianglelefteq z \vee \forall x \trianglelefteq z\neg\forall y \trianglelefteq Yz\neg A_l)] \\
& \leftrightarrow & \tilde{\forall}W\tilde{\exists}V\tilde{\exists}\tilde{V} \trianglelefteq V\tilde{\exists}Y \trianglelefteq \tilde{V} \\
& & \tilde{\forall}z \trianglelefteq W\tilde{V}\forall x \trianglelefteq z\exists y \trianglelefteq YzA_l, \\
(\forall x\exists y A_l \to \tilde{\exists}Y\tilde{\forall}z\forall x \trianglelefteq z\exists y \trianglelefteq YzA_l)^M & \equiv & \tilde{\forall}U, W\tilde{\exists}v, V(\tilde{\forall}\tilde{v} \trianglelefteq v\forall x \trianglelefteq \tilde{v}\exists y \trianglelefteq U\tilde{v}A_l \to \\
& & \tilde{\exists}\tilde{V} \trianglelefteq V\tilde{\exists}Y \trianglelefteq \tilde{V} \\
& & \tilde{\forall}z \trianglelefteq W\tilde{V}\forall x \trianglelefteq z\exists y \trianglelefteq YzA_l).
\end{array}$$

Os termos

$$\begin{array}{rcl}
t_v & :\equiv & \lambda\underline{a}, U, W\,.\,(WU), \\
t_V & :\equiv & \lambda\underline{a}, U, W\,.\,U,
\end{array}$$

estão nas condições pretendidas.

<u>bCC</u> Temos

$$\begin{array}{rcl}
(\neg\tilde{\forall}\underline{z}\exists y \trianglelefteq w\tilde{\forall}\underline{x} \trianglelefteq \underline{z}A_l)^M & \equiv & \tilde{\exists}\underline{u}\tilde{\exists}\underline{\tilde{u}} \trianglelefteq \underline{u}\neg\tilde{\forall}\underline{z} \trianglelefteq \underline{\tilde{u}}\exists y \trianglelefteq w\tilde{\forall}\underline{x} \trianglelefteq \underline{z}A_l \\
& \leftrightarrow & \tilde{\exists}\underline{u}\neg\exists y \trianglelefteq w\tilde{\forall}\underline{x} \trianglelefteq \underline{u}A_l, \\
(\exists y \trianglelefteq w\forall \underline{x}A_l)^M & \equiv & \tilde{\forall}\underline{v}\neg\forall y \trianglelefteq w\tilde{\exists}\underline{\tilde{v}} \trianglelefteq \underline{v}\neg\forall\underline{x} \trianglelefteq \underline{\tilde{v}}A_l \\
& \leftrightarrow & \tilde{\forall}\underline{v}\exists y \trianglelefteq w\forall\underline{x} \trianglelefteq \underline{v}A_l, \\
[\tilde{\forall}w(\neg\tilde{\forall}\underline{z}\exists y \trianglelefteq w\tilde{\forall}\underline{x} \trianglelefteq \underline{z}A_l \vee \exists y \trianglelefteq w\forall\underline{x}A_l)]^M & \equiv & \tilde{\forall}\tilde{w}, \underline{v}\tilde{\exists}\underline{u}\tilde{\forall}w \trianglelefteq \tilde{w}(\exists y \trianglelefteq w\tilde{\forall}\underline{x} \trianglelefteq \underline{u}A_l \to \\
& & \exists y \trianglelefteq w\forall\underline{x} \trianglelefteq \underline{v}A_l).
\end{array}$$

Os termos

$$\underline{t} :\equiv \lambda\underline{a}, \tilde{w}, \underline{v}\,.\,\underline{v}$$

estão nas condições pretendidas.

<u>MAJ</u> Temos

$$[\forall x \exists y (x \trianglelefteq y)]^M \equiv \tilde{\forall} u \tilde{\exists} w \forall x \trianglelefteq u \tilde{\exists} \tilde{w} \trianglelefteq w \neg \forall y \trianglelefteq \tilde{w} \neg x \trianglelefteq y.$$

O termo

$$t :\equiv \lambda u \,.\, u$$

está nas condições pretendidas. □

Teorema 193 (da caracterização de M)**.** *Para toda a fórmula A de $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$, temos*

$$\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ} \vdash A \leftrightarrow A^M.$$

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução na complexidade das fórmulas.

<u>Fórmulas atómicas</u> Neste caso temos $A \equiv A^M$, pelo que o resultado é óbvio.

<u>$\neg A$</u> Temos

$$\begin{array}{rcl} A^M & \equiv & \tilde{\forall} \underline{x} \tilde{\exists} \underline{y} A_M(\underline{x}, \underline{y}), \\ (\neg A)^M & \equiv & \tilde{\forall} \underline{Y} \tilde{\exists} \underline{x} \tilde{\exists} \underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{x} \neg A_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\, \underline{\tilde{x}}). \end{array}$$

Usando a hipótese de indução na primeira equivalência, $\mathsf{B}_{\forall}$, $\mathsf{B}_{\exists}$ e regras de prenifixação na segunda equivalência, $\mathsf{B\text{-}bAC}$ (generalizado a uplos) na implicação da direita para a esquerda da terceira equivalência e MAJ na implicação da esquerda para a direita da mesma equivalência, $\mathsf{B}_{\forall}$, $\mathsf{B}_{\exists}$ e regras de prenifixação na quarta equivalência, pondo $\underline{x} = \underline{\tilde{x}}$ na implicação da direita para a esquerda da quinta equivalência, pondo $\underline{\tilde{x}} = \underline{x}$ e mudando de variável de $\underline{x}$ para $\underline{\tilde{x}}$ na implicação da esquerda para a direita da sexta equivalência, usando o lema da monotonia de M na implicação da direita para a esquerda da sétima equivalência e leis da negação dos quantificados na oitava equivalência, temos

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ} \vdash \neg A & \leftrightarrow & \neg A^M \\ & \leftrightarrow & \neg \forall \underline{x} \exists \underline{y} [\underline{x} \trianglelefteq \underline{x} \to \underline{y} \trianglelefteq \underline{y} \wedge A_M(\underline{x}, \underline{y})] \\ & \leftrightarrow & \neg \tilde{\exists} \underline{Y} \tilde{\forall} \underline{\tilde{x}} \forall \underline{x} \trianglelefteq \underline{\tilde{x}} \exists \underline{y} \trianglelefteq \underline{Y}\, \underline{\tilde{x}} \\ & & [\underline{x} \trianglelefteq \underline{x} \to \underline{y} \trianglelefteq \underline{y} \wedge A_M(\underline{x}, \underline{y})] \\ & \leftrightarrow & \neg \tilde{\exists} \underline{Y} \tilde{\forall} \underline{\tilde{x}} \tilde{\forall} \underline{x} \trianglelefteq \underline{\tilde{x}} \tilde{\exists} \underline{y} \trianglelefteq \underline{Y}\, \underline{\tilde{x}} A_M(\underline{x}, \underline{y}) \\ & \leftrightarrow & \neg \tilde{\exists} \underline{Y} \forall \underline{\tilde{x}} \tilde{\exists} \underline{y} \trianglelefteq \underline{Y}\, \underline{\tilde{x}} A_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{y}) \\ & \leftrightarrow & \neg \tilde{\exists} \underline{Y} \tilde{\forall} \underline{x} \tilde{\forall} \underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{x} \tilde{\exists} \underline{y} \trianglelefteq \underline{Y}\, \underline{\tilde{x}} A_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{y}) \\ & \leftrightarrow & \neg \tilde{\exists} \underline{Y} \tilde{\forall} \underline{x} \tilde{\forall} \underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{x} A_M(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\, \underline{\tilde{x}}) \\ & \leftrightarrow & (\neg A)^M. \end{array}$$

<u>$A \vee B$</u> Demonstramos este caso facilmente usando as regras de prenifixação.

$\underline{\forall z \trianglelefteq tA}$ Temos

$$\begin{aligned} A^M &\equiv \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}A_M(\underline{x},\underline{y}), \\ (\forall z \trianglelefteq tA)^M &\equiv \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}\forall z \trianglelefteq tA_M(\underline{x},\underline{y}). \end{aligned}$$

Usando a hipótese de indução na primeira equivalência, o contra-recíproco de bCC na implicação da esquerda para a direita da terceira equivalência (só no caso $t \trianglelefteq t$, pois no caso $\neg t \trianglelefteq t$ temos $\tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{\hat{y}}\forall z \trianglelefteq t\tilde{\exists}\underline{y} \trianglelefteq \underline{\hat{y}}A_M(\underline{x},\underline{y})$, isto é, $\tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{\hat{y}}\forall z[z \trianglelefteq t \to \tilde{\exists}\underline{y} \trianglelefteq \underline{\hat{y}}A_M(\underline{x},\underline{y})]$, devido a $z \trianglelefteq t$ ser "falso" porque $z \trianglelefteq t \to t \trianglelefteq t$) e o lema da monotonia de M na implicação da esquerda para a direita da quarta equivalência, temos

$$\begin{aligned} \mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ} \vdash \forall z \trianglelefteq tA &\leftrightarrow \forall z \trianglelefteq tA^M \\ &\leftrightarrow \tilde{\forall}\underline{x}\forall z \trianglelefteq t\tilde{\exists}\underline{y}A_M(\underline{x},\underline{y}) \\ &\leftrightarrow \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{\hat{y}}\forall z \trianglelefteq t\tilde{\exists}\underline{y} \trianglelefteq \underline{\hat{y}}A_M(\underline{x},\underline{y}) \\ &\leftrightarrow \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{\hat{y}}\forall z \trianglelefteq tA_M(\underline{x},\underline{\hat{y}}) \\ &\leftrightarrow (\forall z \trianglelefteq tA)^M. \end{aligned}$$

$\underline{\forall zA}$ Temos

$$\begin{aligned} A^M &\equiv \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}A_M(\underline{x},\underline{y}), \\ (\forall zA)^M &\equiv \tilde{\forall}w,\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}\forall z \trianglelefteq wA_M(\underline{x},\underline{y}). \end{aligned}$$

Usando a hipótese de indução na primeira equivalência, MAJ na implicação da direita para a esquerda da segunda equivalência, contra-recíproco de bCC na implicação da esquerda para a direita da quarta equivalência, e o lema da monotonia de M na implicação da esquerda para a direita da quinta equivalência, temos

$$\begin{aligned} \mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ} \vdash \forall zA &\leftrightarrow \forall zA^M \\ &\leftrightarrow \tilde{\forall}w\forall z \trianglelefteq w\tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}A_M(\underline{x},\underline{y}) \\ &\leftrightarrow \tilde{\forall}w\tilde{\forall}\underline{x}\forall z \trianglelefteq w\tilde{\exists}\underline{y}A_M(\underline{x},\underline{y}) \\ &\leftrightarrow \tilde{\forall}w\tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{\hat{y}}\tilde{\forall}z \trianglelefteq w\tilde{\exists}\underline{y} \trianglelefteq \underline{\hat{y}}A_M(\underline{x},\underline{y}) \\ &\leftrightarrow (\forall zA)^M. \quad \square \end{aligned}$$

Observação 194. Analogamente à observação 73, podemos concluir que no teorema da correcção de M não faltam princípios.

Teorema 195 (da extracção de programas por M)**.** *Seja $A_l(x,y)$ uma fórmula limitada de $\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ tal que $FV(A) = \{x,y\}$. Se*

$$\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ} \vdash \forall x\exists yA_l(x,y),$$

então existe um termo fechado monótono t de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}$, que pode ser calculado a partir de uma derivação de $\forall x\exists yA_l(x,y)$, tal que

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall}w\forall x \trianglelefteq w\exists y \trianglelefteq twA_l(x,y).$$

Demonstração. Temos $[\forall x \exists y A_l(x,y)]^M \equiv \tilde{\forall} w \tilde{\exists} z \forall x \trianglelefteq w \tilde{\exists} \tilde{z} \trianglelefteq z \exists y \trianglelefteq \tilde{z} A_l(x,y)$. Pelo teorema da correcção de M existe um termo fechado monótono t tal que (atendendo a que $FV\big(\forall x \exists y A_l(x,y)\big) = \emptyset$) $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall} w \forall x \trianglelefteq w \tilde{\exists} \tilde{z} \trianglelefteq tw \exists y \trianglelefteq \tilde{z} A_l(x,y)$, o que equivale à tese do enunciado. □

Teorema 196 (da conservação por M)**.** *Seja* A_l *uma fórmula limitada de* $\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq}$. *Se*

$$\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ} \vdash \forall x \exists y A_l,$$

então $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} + \mathsf{MAJ} \vdash \forall x \exists y A_l$.

Demonstração. Repetindo os argumentos do teorema da extracção de programas por M, obtemos $\mathsf{HA}^\omega_0 + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall} \underline{a} \forall \underline{l} \trianglelefteq \underline{a} \tilde{\forall} w \forall x \trianglelefteq w \tilde{\exists} \tilde{z} \trianglelefteq t \underline{a} w \exists y \trianglelefteq \tilde{z} A_l$, onde $\underline{l}$ são as variáveis de $FV(\forall x \exists y A_l)$. Daqui, com a ajuda de MAJ, sai facilmente o resultado. □

Observação 197. No artigo [Ferreira 2007], em vez dos princípios $\mathsf{B\text{-}bAC}$ e bCC, são usados o *axioma da escolha monótono*

$$\mathsf{mAC}: \quad \tilde{\forall} x^\rho \tilde{\exists} y^\tau A_l \to \tilde{\exists} Y^{\tau\rho} \tilde{\forall} x^\rho \tilde{\exists} y \trianglelefteq Yx A_l,$$

(mAC vem do inglês *monotone axiom of choice*) onde A_l é uma fórmula limitada de $\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq}$, e o *princípio da colecção limitado*

$$\mathsf{bC}: \quad \forall x \trianglelefteq z \exists y A_l \to \tilde{\exists} w \forall x \trianglelefteq z \exists y \trianglelefteq w A_l,$$

(bC vem do inglês *bounded collection principle*) onde também A_l é uma fórmula limitada de $\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq}$. Usar uns ou outros princípios é indiferente já que as teorias $\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ}$ e $\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{mAC} + \mathsf{bC} + \mathsf{MAJ}$ são iguais. Por uma questão de uniformidade com os princípios usados na B-tradução, preferimos usar $\mathsf{B\text{-}bAC}$ e bCC.

11.2 Interpretação funcional limitada à Shoenfield modificada

Nesta secção vamos explicitar uma observação em [Ferreira 2007] e estender a M a uma linguagem baseada em $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\forall$, analogamente ao que fizemos com S.

Definição 198. Para cada fórmula A de $\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ baseado em $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\forall$, definimos as fórmulas A^{M_m} e A_{M_m} de $\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq}$, a primeira delas chamada *interpretação funcional limitada à Shoenfield modificada* de A, por indução na complexidade das fórmulas.

1. Se A é fórmula atómica, então $A^{M_m} :\equiv \tilde{\forall} \underline{x} \tilde{\exists} \underline{y} A_{M_m}(\underline{x}, \underline{y}) :\equiv A$ onde $\underline{x}$ e $\underline{y}$ são uplos vazios.

Suponhamos que já definimos $A^{M_m} \equiv \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}A_{M_m}(\underline{x},\underline{y})$ e $B^{M_m} \equiv \tilde{\forall}\underline{x'}\tilde{\exists}\underline{y'}B_{M_m}(\underline{x'},\underline{y'})$. Então:

2. $(\neg A)^{M_m} :\equiv \tilde{\forall}\underline{Y}\tilde{\exists}\underline{x}(\neg A)_{M_m}(\underline{Y},\underline{x}) :\equiv \tilde{\forall}\underline{Y}\tilde{\exists}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{x}\neg A_{M_m}(\underline{\tilde{x}},\underline{Y}\,\underline{\tilde{x}})$;

3. $(A\wedge B)^{M_m} :\equiv \tilde{\forall}\underline{x},\underline{x'}\tilde{\exists}\underline{y},\underline{y'}(A\wedge B)_{M_m}(\underline{x},\underline{x'},\underline{y},\underline{y'}) :\equiv \tilde{\forall}\underline{x},\underline{x'}\tilde{\exists}\underline{y},\underline{y'}[A_{M_m}(\underline{x},\underline{y})\wedge B_{M_m}(\underline{x'},\underline{y'})]$;

4. $(A\vee B)^{M_m} :\equiv \tilde{\forall}\underline{x},\underline{x'}\tilde{\exists}\underline{y},\underline{y'}(A\vee B)_{M_m}(\underline{x},\underline{x'},\underline{y},\underline{y'}) :\equiv \tilde{\forall}\underline{x},\underline{x'}\tilde{\exists}\underline{y},\underline{y'}[A_{M_m}(\underline{x},\underline{y})\vee B_{M_m}(\underline{x'},\underline{y'})]$;

5. $(\forall z \trianglelefteq tA)^{M_m} :\equiv \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}(\forall z \trianglelefteq tA)_{M_m}(\underline{x},\underline{y}) :\equiv \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}\forall z \trianglelefteq tA_{M_m}(\underline{x},\underline{y})$.

6. $(\forall zA)^{M_m} :\equiv \tilde{\forall}w,\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}(\forall zA)_{M_m}(w,\underline{x},\underline{y}) :\equiv \tilde{\forall}w,\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}\forall z \trianglelefteq wA_{M_m}(\underline{x},\underline{y})$;

Numa interpretação $A^{M_m} \equiv \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}A_{M_m}(\underline{x},\underline{y})$, supomos que as variáveis $\underline{x},\underline{y}$ são distintas e não ocorrem livres em A.
Se estivermos a encarar A^{M_m} e A_{M_m} como fórmulas baseadas em $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\forall$, então o símbolo $\neg$ que surge na alínea 2 é um símbolo primitivo e os símbolos $\tilde{\forall}zC$ e $\tilde{\exists}zC$ que surgem em todas as alíneas são abreviaturas de $\forall z(\neg z\trianglelefteq z\vee C)$ e $\neg\forall z\neg(z\trianglelefteq z\wedge C)$, respectivamente.
Se estivermos a encarar A^{M_m} e A_{M_m} como baseadas em $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$ e $\exists$ (por exemplo, como fórmulas de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$), então o símbolo $\neg$ que surge é um símbolo definido e os símbolos $\tilde{\forall}zC$ e $\tilde{\exists}zC$ são abreviaturas de $\forall z(z \trianglelefteq z \rightarrow C)$ e $\exists z(z \trianglelefteq z \wedge C)$, respectivamente, *não* de $\forall z(\neg z \trianglelefteq z \vee C)$ e $\neg\forall z\neg(z \trianglelefteq z \wedge C)$, respectivamente.

Observação 199. Demonstramos facilmente por indução na complexidade das fórmulas que A_{M_m} é uma fórmula limitada e que se A_l é uma fórmula limitada de $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$, então $(A_l)^{M_m} \equiv (A_l)_{M_m} \equiv A_l$.

O lema da monotonia de M estende-se facilmente a M_m.

Lema 200 (da monotonia de M_m)**.** *Para toda a fórmula A de $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$, temos*

$$\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} \vdash \underline{x} \trianglelefteq \underline{x} \wedge \underline{y} \trianglelefteq \underline{\hat{y}} \wedge A_{M_m}(\underline{x},\underline{y}) \rightarrow A_{M_m}(\underline{x},\underline{\hat{y}}).$$

Demonstração. A demonstração é análoga à do lema da monotonia de M, tratando-se o caso da conjunção de forma análogo ao caso da disjunção. $\square$

Teorema 201 (da correcção de M_m)**.** *Sejam A uma fórmula arbitrária de $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$, $\underline{l}$ todas as variáveis livres de A e $A^{M_m} \equiv \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}A_{M_m}(\underline{x},\underline{y})$. Se $\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}+\mathsf{B\text{-}bAC}+\mathsf{bCC}+\mathsf{MAJ} \vdash A$, então existe um uplo de termos fechados monótonos $\underline{t}$ de $\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$, que pode ser calculado a partir de uma derivação de A, tal que*

$$\mathsf{HA}^{\omega}_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash \tilde{\forall}\underline{a},\underline{x}\forall\underline{l} \trianglelefteq \underline{a}A_{M_m}(\underline{x},\underline{t}\,\underline{a}\,\underline{x}).$$

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução no comprimento das derivações, construindo explicitamente os termos $\underline{t}$. Todos os casos são análogos aos do teorema da correcção de M, excepto os seguintes.

$\underline{A \wedge B \to A}$ Temos

$$(A \wedge B \to A)^{M_m} \equiv \tilde{\forall} \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''} \tilde{\exists} \underline{x}, \underline{x'}, \underline{y''}$$
$$\big[\tilde{\exists} \underline{\tilde{x}}, \underline{\tilde{x}'} \trianglelefteq \underline{x}, \underline{x'} \neg \big(A_{M_m}(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\,\underline{\tilde{x}}\,\underline{\tilde{x}'}) \wedge B_{M_m}(\underline{\tilde{x}'}, \underline{Y'}\,\underline{\tilde{x}}\,\underline{\tilde{x}'})\big) \vee A_{M_m}(\underline{x''}, \underline{y''})\big].$$

Os termos

$$\begin{aligned} \underline{t}_{\underline{x}} &:\equiv \lambda \underline{a}, \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''} \,.\, \underline{x''}, \\ \underline{t}_{\underline{x'}} &:\equiv \lambda \underline{a}, \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''} \,.\, \underline{\mathcal{O}}, \\ \underline{t}_{\underline{y''}} &:\equiv \lambda \underline{a}, \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''} \,.\, (\underline{Y}\,\underline{x''}\,\underline{\mathcal{O}}), \end{aligned}$$

(onde o uplo $\underline{\mathcal{O}}$ tem tipo apropriado) estão nas condições pretendidas (pode ser útil aplicar B-LEM a $A_{M_m}(\underline{x''}, \underline{Y}\,\underline{x''}\,\underline{\mathcal{O}})$).

$\underline{A \wedge B \to B}$ Este caso é análogo ao caso anterior.

$\underline{A \to (B \to A \wedge B)}$ Temos

$$[A \to (B \to A \wedge B)]^{M_m} \equiv \tilde{\forall} \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''}, \underline{x'''} \tilde{\exists} \underline{x}, \underline{x'}, \underline{y''}, \underline{y'''} \Big[\tilde{\exists} \underline{\tilde{x}} \trianglelefteq \underline{x} \neg A_{M_m}(\underline{\tilde{x}}, \underline{Y}\,\underline{\tilde{x}}) \vee$$
$$\Big(\tilde{\exists} \underline{\tilde{x}'} \trianglelefteq \underline{x'} \neg B_M(\underline{\tilde{x}'}, \underline{Y'}\,\underline{\tilde{x}'}) \vee \big(A_{M_m}(\underline{x''}, \underline{y''}) \wedge B_{M_m}(\underline{x'''}, \underline{y'''})\big)\Big)\Big].$$

Os termos

$$\begin{aligned} \underline{t}_{\underline{x}} &:\equiv \lambda \underline{a}, \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''}, \underline{x'''} \,.\, \underline{x''}, \\ \underline{t}_{\underline{x'}} &:\equiv \lambda \underline{a}, \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''}, \underline{x'''} \,.\, \underline{x'''}, \\ \underline{t}_{\underline{y''}} &:\equiv \lambda \underline{a}, \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''}, \underline{x'''} \,.\, (\underline{Y}\,\underline{x''}), \\ \underline{t}_{\underline{y'''}} &:\equiv \lambda \underline{a}, \underline{Y}, \underline{Y'}, \underline{x''}, \underline{x'''} \,.\, (\underline{Y'}\,\underline{x'''}), \end{aligned}$$

estão nas condições pretendidas (pode ser útil aplicar B-LEM a $A_{M_m}(\underline{x''}, \underline{Y}\,\underline{x''})$ e a $B_{M_m}(\underline{x'''}, \underline{Y'}\,\underline{x'''})$).

$\underline{\mathsf{B}_\forall}$ Na demonstração do teorema da correcção de M (i) demo-nos a algum trabalho ao argumentar que para ver que há termos que funcionam para $A \leftrightarrow B$, basta ver que os há para $A \to B$ e $B \to A$, e (ii) usámos esse facto ao verificar que há termos que funcionam para $\mathsf{B}_\forall$. No caso de M_m a parte (i) é óbvia e a parte (ii) é análoga.

$\underline{\text{B-bAC}}$ Este caso é análogo ao feito no teorema da correcção de M, com a única diferença de a tradução de $\tilde{\exists} Y \tilde{\forall} z \forall x \trianglelefteq z \exists y \trianglelefteq Y z A_l$ ser

$$\begin{aligned} (\tilde{\exists} Y \tilde{\forall} z \forall x \trianglelefteq z \exists y \trianglelefteq Y z A_l)^{M_m} &\equiv \tilde{\forall} W \tilde{\exists} V \tilde{\exists} \tilde{V} \trianglelefteq V \neg \forall Y \trianglelefteq \tilde{V} \tilde{\exists} \tilde{w} \trianglelefteq W \tilde{V} \\ &\quad \neg [Y \trianglelefteq Y \wedge \forall z \trianglelefteq \tilde{w} (\neg z \trianglelefteq z \vee \forall x \trianglelefteq z \neg \forall y \trianglelefteq Y z \neg A_l)] \\ &\leftrightarrow \tilde{\forall} W \tilde{\exists} V \tilde{\exists} \tilde{V} \trianglelefteq V \tilde{\exists} Y \trianglelefteq \tilde{V} \\ &\quad \tilde{\forall} z \trianglelefteq W \tilde{V} \forall x \trianglelefteq z \exists y \trianglelefteq Y z A_l. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 202 (da caracterização de M_m)**.** *Para toda a fórmula A de $\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq}$, temos*

$$\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ} \vdash A \leftrightarrow A^{M_m}.$$

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução na complexidade das fórmulas. Basta entender a demonstração do teorema da caracterização de M ao caso $A \wedge B$, o que fazemos analogamente ao caso $A \vee B$. ☐

Observação 203. Analogamente à observação 73, podemos concluir que no teorema da correcção de M_m não faltam princípios.

11.3 Equivalência entre as interpretações funcionais limitadas à Shoenfield

Vamos demonstrar a equivalência entre M e M_m de forma bastante semelhante à demonstração da proposição 123 sobre a equivalência entre S, S_m e S_{mm}.

Proposição 204 (equivalência entre M e M_m)**.** *Para toda a fórmula A de $\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq}$ baseado em $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\forall$, temos*

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bIP} + \mathsf{bM} + \mathsf{MAJ} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash A^M \leftrightarrow A^{M_m},$$

onde ao calcularmos A^M encaramos $\wedge$ como símbolo definido.

Demonstração. Pelos teoremas da caracterização de M e M_m, temos $\mathsf{PA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bCC} + \mathsf{MAJ} \vdash A^M \leftrightarrow A^{M_m}$. Digamos que $A^M \equiv \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}A_M(\underline{x},\underline{y})$ e $A^{M_m} \equiv \tilde{\forall}\underline{x'}\tilde{\exists}\underline{y'}A_{M_m}(\underline{x'},\underline{y'})$, onde $\underline{x} = x_1,\dots,x_m$ e $\underline{x'} = x'_1,\dots,x'_n$. Daqui, pelo teorema da correcção de Ku, vem

$$\begin{aligned}
&\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bIP} + \mathsf{bM} + \mathsf{MAJ} \vdash (A^M \leftrightarrow A^{M_m})^{Ku} \equiv \\
&\neg\neg\big[\underbrace{\forall x_1\neg\neg(x_1 \trianglelefteq x_1 \to \dots \to \forall x_m\neg\neg\big(x_m \trianglelefteq x_m \to \tilde{\exists}\underline{y}(A_M)_{Ku}(\underline{x},\underline{y})\big)}_{\equiv (A^M)_{Ku}} \leftrightarrow \\
&\underbrace{\forall x'_1\neg\neg(x'_1 \trianglelefteq x'_1 \to \dots \to \forall x'_n\neg\neg\big(x'_n \trianglelefteq x'_n \to \tilde{\exists}\underline{y'}(A_{M_m})_{Ku}(\underline{x'},\underline{y'})\big)}_{\equiv (A^{M_m})_{Ku}}\big].
\end{aligned} \tag{11.12}$$

Como intuicionisticamente temos $\neg\neg(B \wedge C) \leftrightarrow \neg\neg B \wedge \neg\neg C$ e $\neg\neg(B \to C) \leftrightarrow (\neg\neg B \to \neg\neg C)$, então também temos $\neg\neg(B \leftrightarrow C) \leftrightarrow (\neg\neg B \leftrightarrow \neg\neg C)$. Portanto, de (11.12) vem

$$\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{B\text{-}bAC} + \mathsf{bIP} + \mathsf{bM} + \mathsf{MAJ} \vdash \underbrace{\neg\neg(A^M)_{Ku}}_{\equiv (A^M)^{Ku}} \leftrightarrow \underbrace{\neg\neg(A^{M_m})_{Ku}}_{\equiv (A^{M_m})^{Ku}}. \tag{11.13}$$

Vejamos $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq} + \mathsf{bM} + \mathsf{B\text{-}LEM} \vdash (A^M)^{Ku} \leftrightarrow A^M$. Para derivarmos a implicação da esquerda para a direita usamos $\neg\neg\forall zB \to \forall z\neg\neg B$ e $\neg\neg(B \to C) \to (B \to$

$\neg\neg C$) (que valem intuicionisticamente) para passarmos todas as duplas negações de $(A^M)^{Ku}$ para antes de $\tilde{\exists}\underline{y}$, obtendo $\tilde{\forall}\underline{x}\neg\neg\cdots\neg\neg\tilde{\exists}\underline{y}(A_M)_{Ku}(\underline{x},\underline{y})$. Depois usamos $\neg\neg\neg B \to \neg B$ (que vale intuicionisticamente) para obter $\tilde{\forall}\underline{x}\neg\neg\tilde{\exists}\underline{y}(A_M)_{Ku}(\underline{x},\underline{y})$. De seguida usamos a proposição 161 para obter $\tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{z}\neg\neg\tilde{\exists}\underline{y} \trianglelefteq \underline{z}(A_M)_{Ku}(\underline{x},\underline{y})$, onde $(A_M)_{Ku}(\underline{x},\underline{y})$ ainda é uma fórmula limitada. Depois usamos $\mathsf{B\text{-}LEM}$ para obter $\tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{z}\tilde{\exists}\underline{y}\trianglelefteq\underline{z}(A_M)_{Ku}(\underline{x},\underline{y})$. Agora usamos usamos $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}+\mathsf{B\text{-}LEM} \vdash (A_M)_{Ku}(\underline{x},\underline{y}) \leftrightarrow A_M(\underline{x},\underline{y})$ (provamos $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}+\mathsf{B\text{-}LEM} \vdash (A_l)_{Ku} \leftrightarrow A_l$ facilmente por indução na complexidade das fórmulas limitadas A_l) para obter $\tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{z}\tilde{\exists}\underline{y} \trianglelefteq \underline{z}A_M(\underline{x},\underline{y})$. Finalmente, usamos o lema da monotonia de M para obter $\tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{z}A_M(\underline{x},\underline{z})$, o que equivale a A^M.
Para derivarmos a implicação da direita para a esquerda basta usarmos $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}+\mathsf{B\text{-}LEM} \vdash (A_M)_{Ku}(\underline{x},\underline{y}) \leftrightarrow A_M(\underline{x},\underline{y})$ para de $A^M \equiv \tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}A_M(\underline{x},\underline{y})$ obtermos $\tilde{\forall}\underline{x}\tilde{\exists}\underline{y}(A_M)_{Ku}(\underline{x},\underline{y})$ e depois usarmos $B \to \neg\neg B$ (que vale intuicionisticamente) para introduzirmos duplas negações e obtermos $(A^M)^{Ku}$.
Analogamente provamos $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}+\mathsf{bM}+\mathsf{B\text{-}LEM} \vdash (A^{M_m})^{Ku} \leftrightarrow A^{M_m}$.

A partir de $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}+\mathsf{bM}+\mathsf{B\text{-}LEM} \vdash (A^M)^{Ku} \leftrightarrow A^M$, $\mathsf{HA}^\omega_{0\trianglelefteq}+\mathsf{bM}+\mathsf{B\text{-}LEM} \vdash (A^{M_m})^{Ku} \leftrightarrow A^{M_m}$ e (11.13) concluímos o resultado. $\square$

Bibliografia

[ASL] Página «Prizes and Awards», www.aslonline.org/info-prizes.html, do sítio *Association for Symbolic Logic*, www.aslonline.org.

[Avigad 2006] Avigad, Jeremy, «A variant of the double-negation translation», *Carnegie Mellon Technical Report*, CMU-PHIL-179, Agosto (?) 2006, 3 páginas. Disponível *online* em www.andrew.cmu.edu/user/avigad.

[Avigad e Feferman 1998] Avigad, Jeremy e Feferman, Solomon, «Gödel's Functional ("Dialectica") Interpretation», *in* Samuel R. Buss (editor), *Handbook of Proof Theory* («Studies in logic and the foundations of mathematics», volume 137), Amesterdão, North-Holland (Elsevier Science Publishers B. V.), 1998, páginas 337–405. Disponível *online* em www.andrew.cmu.edu/user/avigad/ e http://math.stanford.edu/∼feferman/.

[Ferreira 2005] Ferreira, Fernando, *Princípios de Lógica Matemática*, manuscrito, 2005, 108 páginas.

[Ferreira 2006] Ferreira, Fernando, «Proof Interpretations», *Days in Logic '06* («Textos de Matemática», volume 38), Portugal, Reinhard Kahle e Isabel Oitavem (editores), Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia de Coimbra, 2006, páginas 1–42.

[Ferreira 2007] Ferreira, Fernando, *Injecting uniformities into Peano arithmetic*, manuscrito, 2007, 15 páginas.

[Ferreira e Oliva 2005] Ferreira, Fernando e Oliva, Paulo, «Bounded Functional Interpretation», *Annals of Pure and Applied Logic*, número 135, Setembro 2005, páginas 73–112. Disponível *online* em www.ciul.ul.pt/∼ferferr e www.dcs.qmul.ac.uk/∼pbo.

[Gentzen 1935] Gentzen, Gerhard, «Untersuchungen über das logische Schließen», *Mathematische Zeitschrift*, volume 39, número 1, 1935, páginas 176–210 e 405–431. Disponível *online* em http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN266833020_0039.

[Gödel 1933] Gödel, Kurt, «On intuitionistic arithmetic and number theory», *in* [Gödel 1986], páginas 286–295.

[Gödel 1941] Gödel, Kurt, «In what sense is intuitionistic logic constructive?», *in* [Gödel 1995], páginas 189–200.

[Gödel 1958] Gödel, Kurt, «Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes», *Dialectica*, volume 12, 1958, páginas 280–287. Tradução para inglês: «On a hitherto unutilized extension of the finitary standpoint», *in* [Gödel 1990], páginas 240–251.

[Gödel 1972] Gödel, Kurt, «On an extension of finitary mathematics which has not yet been used», *in* [Gödel 1990], páginas 271–280.

[Gödel 1986] Gödel, Kurt, *Collected Works*, volume I, Nova Iorque, Solomon Feferman *et al.* (editores), Oxford University Press, 1986, xvi–474 páginas.

[Gödel 1990] Gödel, Kurt, *Collected Works*, volume II, Nova Iorque, Solomon Feferman *et al.* (editores), Oxford University Press, 1990, xiv–407 páginas.

[Gödel 1995] Gödel, Kurt, *Collected Works*, volume III, Nova Iorque, Solomon Feferman *et al.* (editores), Oxford University Press, 1995, xvii-532 páginas.

[Hida *et al.* 1973] Hida, Takeyuki *et al.* (editores), nota editorial sobre o falecimento de Sigekatu Kuroda, *Nagoya Mathematical Journal*, volume 49, Mathematical Institute, Faculty of Science, Nagoya University, Março 1973, 3 páginas. Disponível *online* em http://projecteuclid.org/euclid.nmj/1118798867.

[Hyland 2002] Hyland, J. M. E., «Proof theory in the abstract», *Annals of Pure and Applied Logic*, volume 114, números 1–3, Abril 2002, páginas 43–78.

[Howard 1973] Howard, W. A., «Hereditarily majorizable functionals of finite type», *in* [Troelstra 1973], páginas 454–461.

[Jockusch 2001] Jockusch, Jr., Carl G., «In memoriam: Joseph R. Shoenfield 1927–2000», *The Bulletin of Symbolic Logic*, volume 7, número 3, Setembro 2001, páginas 393–396. Disponível *online* em www.math.ucla.edu/∼asl/bsl/0703-toc.htm

[Kohlenbach 2007] Kohlenbach, Ulrich, *Applied Proof Theory: Proof Interpretations and their Use in Mathematics*, manuscrito, 2007, viii–567 páginas.

[Kohlenbach e Streicher 2007] Kohlenbach, Ulrich e Streicher, Thomas, «Shoenfield is Gödel after Krivine», *Mathematical Logic Quarterly*, volume 53, 2007, páginas 176–179. Disponível *online* em www.mathematik.tu-darmstadt.de/∼kohlenbach/ e www.mathematik.tu-darmstadt.de/∼streicher/.

[Krivine 1990] Krivine, Jean-Louis, «Opérateurs de mise en mémoire et traduction de Gödel», *Archive for Mathematical Logic*, volume 30, número 4, Julho 1990, páginas 241–267.

[Kuroda 1955] Kuroda, Sigekatu, «Intuitionistische Untersuchungen der formalistischen Logik», *Nagoya Mathematical Journal*, volume 2, 1951, páginas 35–47.

[Luckhardt 1973] Luckhardt, Horst, *Extensional Gödel Functional Interpretation — A Consistency Proof of Classical Analysis* («Lecture Notes in Mathematics, número 306), Nova Iorque, Springer-Verlag, 1973, vi–161 páginas.

[MacTutor] Páginas
«Gerhard Gentzen»,
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gentzen.html,
«Kurt Gödel»,
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Godel.html,
«Arend Heyting»,
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Heyting.html e
«Giuseppe Peano»,
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Peano.html,
do sítio *MacTutor History of Mathematics archive*,
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk.

[Oliva 2006] Oliva, Paulo, «Understanding and Using Spector's Bar Recursive Interpretation of Classical Analysis», *in* Arnold Beckmann *et al.* (editores), *Logical Approaches to Computational Barriers* («Lecture Notes in Computer Science», volume 3988) (Proceedings Second Conference on Computability in Europe, CiE 2006), Springer Berlin/Heidelberg, 2006, páginas 423–434. Disponível *online* em www.dcs.qmul.ac.uk/∼pbo/.

[Peano 1889] Peano, Giuseppe, «Arithmetices principia, nova methodo exposita», *in* Jean van Heijenoort (editor), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Harvard University Press, 1967 (3.ª edição: 1976), páginas 83–97.

[Pelletier 2000] Pelletier, Francis Jeffry, «A History of Natural Deduction and Elementary Logic Textbooks», *Logical Consequence: Rival Approaches*, volume 1, John Woods e Bryson Brown (editores), Oxford, Hermes Science Pubs, 2000, páginas 105–138. Disponível *online* em www.sfu.ca/∼jeffpell/.

[Personal Network Search] Página «Sigekatu Kuroda»,
www.arnetminer.net/search.jsp?keyword=Sigekatu%20Kuroda,
do sítio *Personal Network Search*, www.arnetminer.net.

[Podnieks] Podnieks, Karlis, *What is Mathematics: Gödel's Theorem and Around*, livro em hipertexto, disponível *online* em www.ltn.lv/∼podnieks/.

[Reus e Streicher 1998] Reus, Bernhard e Streicher, Thomas, «Classical logic, continuation semantics and abstract machines», *The Journal of Functional Programming*, volume 8, número 6, Novembro 1998, páginas 543–572. Disponível *online* em http://citeseer.ist.psu.edu/streicher98classical.html.

[Russell 1920] Russell, Bertrand, *Introduction to Mathematical Philosophy* («Library of Philosophy»), J. H. Muirhead (editor), Londres: George Allen & Unwin Ltd., Nova Iorque: The Macmillan Co., 1919 (2.ª edição: 1920), viii–208 páginas. Disponível *online* em
www.archive.org/details/introductiontoma00russuoft.

[Shoenfield 1967] Shoenfield, Joseph R., *Mathematical Logic* («Addison-Wesley series in logic», número 1 (?)), Addison-Wesley Pub. Co. (republicado em 2001 pela Association for Symbolic Logic), 1967, vii–344 páginas.

[Simpson 2006] Simpson, Stephen G., *Foundations of Mathematics*, manuscrito, 2007, 123 páginas. Disponível *online* em www.math.psu.edu/simpson/.

[Troelstra 1968] Troelstra, A. S., «The scientific work of A. Heyting», *Compositio Mathematica*, tomo 20, 1968, páginas 3–12. Disponível *online* em
http://www.numdam.org/item?id=CM_1968__20__3_0.

[Troelstra 1973] Troelstra, A. S. (editor), *Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis* («Lecture Notes in Mathematics», número 344), sem local, Springer-Verlag, 1973, xvii–485 páginas.

[Troelstra e Schwichtenberg 1996] Troelstra, A. S. e Schwichtenberg, H., *Basic Proof Theory* («Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science», número 43), Grã-Bretanha, Cambridge University Press, 1996, xi–343 páginas.

[Troelstra e van Dalen 1988] Troelstra, A. S. e van Dalen, D., *Constructivism in Mathemathics*, volume II («Studies in logic and the foundations of mathematics», número 123), Amesterdão, North-Holland (Elsevier Science Publishers B. V.), 1988, xxxvii–879–LII páginas (2 volumes).

[van Dalen 1989] van Dalen, Dirk, *Logic and Structure*, Nova Iorque, Heidelberg, Berlim, Springer-Verlag, 1980 (2.ª edição: 1989), x–263 páginas.

[Wikipedia] Páginas
«Gerhard Gentzen», http://en.wikipedia.org/wiki/Gerhard_Gentzen,
«Kurt Gödel», http://en.wikipedia.org/wiki/Kurt_G%C3%B6del,
«Arend Heyting», http://en.wikipedia.org/wiki/Arend_Heyting,
«Giuseppe Peano», http://en.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano,
«Natural deduction», http://en.wikipedia.org/wiki/Natural_deduction e
«Peano axioms», http://en.wikipedia.org/wiki/Peano_axioms,
do sítio *Wikipedia*, http://en.wikipedia.org.

Nomenclatura

$\perp$ (símbolo, definido)	*falsum*, página 28
$\perp$ (símbolo, primitivo)	*falsum*, página 18
$\neg$ (definida)	negação, página 18
$\neg$ (primitiva)	negação, página 23
$\wedge$ (definida)	conjunção, página 23
$\wedge$ (primitiva)	conjunção, página 18
$\vee$	disjunção, página 18
$\rightarrow$ (definida)	implicação, página 23
$\rightarrow$ (primitiva)	implicação, página 18
$\Rightarrow$	implicação em meta-nível, página 17
$\leftrightarrow$	equivalência, página 18
$\Leftrightarrow$	equivalência em meta-nível, página 17
$\forall$ (primitivo)	quantificador universal, página 18
$\forall x \trianglelefteq_\rho t$	quantificador universal limitado, página 121
$\tilde{\forall}$	quantificador universal monótono, página 123
$\exists$ (definido)	quantificador existencial, página 23
$\exists$ (primitivo)	quantificador existencial, página 18
$\exists x \trianglelefteq_\rho t$	quantificador existencial limitado, página 121
$\tilde{\exists}$	quantificador existencial monótono, página 123
$\perp$ (regra)	regra *falsum*, página 20
$\wedge\mathsf{I}$	regra da $\wedge$-introdução, página 20

$\wedge\mathsf{E_r}$	regra da $\wedge$-eliminação à direita, página 20
$\wedge\mathsf{E_l}$	regra da $\wedge$-eliminação à esquerda, página 20
$\vee\mathsf{I_r}$	regra da $\vee$-introdução à direita, página 21
$\vee\mathsf{I_l}$	regra da $\vee$-introdução à esquerda, página 21
$\vee\mathsf{E}$	regra da $\vee$-eliminação, página 21
$\to\mathsf{I}$	regra da $\to$-introdução, página 21
$\to\mathsf{E}$	regra da $\to$-eliminação, página 21
$\forall\mathsf{I}$	regra da $\forall$-introdução, página 21
$\forall\mathsf{E}$	regra da $\forall$-eliminação, página 21
$\exists\mathsf{I}$	regra da $\exists$-introdução, página 21
$\exists\mathsf{E}$	regra da $\exists$-eliminação, página 21
RAA	regra *reductio ad absurdum*, página 23
$\Gamma \vdash_{i,G} A$	a fórmula A é derivável pelo sistema de dedução formal de Gödel para a lógica intuicionista a partir de Γ, página 19
$\Gamma \vdash_{c,G} A$	a fórmula A é derivável pelo sistema de dedução formal de Gödel para a lógica clássica a partir de Γ, página 23
$\Gamma \vdash_{i,N} A$	a fórmula A é derivável pela dedução natural para a lógica intuicionista a partir de Γ, página 22
$\Gamma \vdash_{c,N} A$	a fórmula A é derivável pela dedução natural para a lógica clássica a partir de Γ, página 23
$\Gamma \vdash_{c,S} A$	a fórmula A é derivável pelo sistema de dedução formal de Shoenfield para a lógica clássica a partir de Γ, página 24
$\Gamma \vdash_{c,S_m} A$	a fórmula A é derivável pelo sistema de dedução formal de Shoenfield para a lógica clássica modificado a partir de Γ, página 25
HA_0^ω	aritmética de Heyting em todos os tipos finitos com tratamento minimal da igualdade, página 32
$\mathsf{HA}_{0\trianglelefteq}^\omega$	aritmética de Heyting em todos os tipos finitos com tratamento minimal da igualdade e majoração intensional, página 121
PA_0^ω	aritmética de Peano em todos os tipos finitos com tratamento minimal da igualdade, página 34

$\mathsf{PA}^{\omega}_{0\trianglelefteq}$	aritmética de Peano em todos os tipos finitos com tratamento minimal da igualdade e majoração intensional, página 122
$=_0$	igualdade entre termos de tipo 0, página 32
$\leq_0$	desigualdade entre termos de tipo 0, página 117
$\trianglelefteq_\rho$	majoração intensional entre termos de tipo ρ, página 121
$\leq^*_\rho$	majoração de Howard-Bezem entre termos de tipo ρ, página 146
0 (símbolo)	zero, página 32
S (símbolo)	sucessor, página 32
$\Pi_{\rho,\tau}$	projector de tipo $\rho\tau\rho$, página 32
$\Sigma_{\delta,\rho,\tau}$	combinador de tipo $\tau\delta(\rho\delta)(\tau\rho\delta)$, página 32
$\underline{R}_{\underline{\rho}} = (R_1)_{\underline{\rho}}, \ldots, (R_k)_{\underline{\rho}}$	uplo, de tipo $\underline{\rho}(\underline{\rho}^t 0 \underline{\rho}^t)\underline{\rho}^t 0$, de recursores, página 32
0 (função)	função primitiva recursiva inicial zero, página 50
Z	função primitiva recursiva inicial identicamente nula, página 50
S (função)	função primitiva recursiva sucessor, página 50
P_{ki}	função primitiva recursiva inicial que projecta a i-ésima componente de um k-uplo, página 50
$+$	adição ou termo induzido por ela, página 54
$\cdot$	multiplicação ou termo induzido por ela, página 54
$\overline{sg}$	"complemento" da função sinal ou termo induzido por ele, página 54
pd	função predecessor ou termo induzido por ela, página 54
$\dot{-}$	subtracção truncada ou termo induzido por ela, página 54
$\lvert \cdot - \cdot \rvert$	função valor absoluto da diferença ou termo induzido por ela, página 54
AC	axioma da escolha, página 62
bAC	axioma da escolha limitado, página 133
$\mathsf{B\text{-}bAC}$	axioma da escolha limitado para fórmulas limitadas, página 133
bC	princípio da colecção limitado, página 168

bCC	princípio da contra-colecção limitado, página 134
bIP	princípio da independência das premissas limitado, página 134
B-LEM	lei do terceiro excluído para fórmulas limitadas, página 133
bM	princípio de Markov limitado, página 134
bUD	princípio da disjunção universal, página 134
IA	axioma de indução, página 34
IP	princípio da independência das premissas para fórmulas universais puras, página 63
IR	regra de indução, página 35
LDN	lei da dupla negação, página 28
LEM	lei do terceiro excluído, página 22
M	princípio de Markov, página 63
mAC	axioma da escolha monótono, página 168
MAJ	axioma da majoração, página 134
QF-AC	axioma da escolha sem quantificadores, página 62
$\mathsf{RL}_{\trianglelefteq}$	regra que governa $\trianglelefteq$, página 122
$\mathsf{B}_{\forall}$	axioma que governa a quantificação universal limitada, página 122
$\mathsf{B}_{\exists}$	axioma que governa a quantificação existencial limitada, página 122
M_1	primeiro axioma que governa $\trianglelefteq$, página 122
M_2	segundo axioma que governa $\trianglelefteq$, página 122
Π	axiomas dos projectores, página 33
Σ	axiomas dos combinadores, página 33
$\underline{R}$	axiomas dos recursores, página 33
B	interpretação funcional limitada, página 137
D	interpretação funcional de Gödel, página 67
Kr	tradução negativa de Krivine, página 87
Kr_m	tradução negativa de Krivine modificada, página 91

Ku	tradução negativa de Kuroda, página 83
M_m	interpretação funcional limitada à Shoenfield modificada, página 168
M	interpretação funcional limitada à Shoenfield, página 155
S (tradução)	tradução de Shoenfield, página 95
S_m	primeira tradução de Shoenfield modificada, página 104
S_{mm}	segunda tradução de Shoenfield modificada, página 106
$\mathbb{T}$	conjunto de todos os tipos finitos, página 30
$\lambda \underline{x} \,.\, \underline{t}$	λ-abstracção dos termos $\underline{t}$ relativamente às variáveis $\underline{x}$, página 40
$\mathcal{O}$	$\lambda \underline{x} \,.\, 0$, página 42
T	teoria de Gödel, página 40
$t_{A_{sq}}$	termo tal que $t_{A_{sq}} =_0 0 \leftrightarrow A_{sq}$, página 59
$\underline{p}^{(n)}$	termos de descodificação, página 136
$c^{(n)}$	termo de codificação, página 136
A_{at}	fórmula atómica, página 33
A_{sq}	fórmula sem quantificadores, página 52
Ft	função induzida pelo termo t fechado de tipo $0 \cdots 0$, página 49
Tf	termo induzido pela função primitiva recursiva f, página 50
$FV(A)$	conjunto das variáveis livres da fórmula A, página 18
$FV(t)$	conjunto das variáveis que ocorrem no termo t, página 18
$A(D)$	conjunto dos nodos da dedução D cujas etiquetas são hipóteses abertas, página 20
$F(D)$	conjunto dos nodos da dedução D cujas etiquetas são hipóteses fechadas, página 20
$A \equiv B$	igualdade sintáctica entre as fórmulas A e B, página 17
$t \equiv q$	igualdade sintáctica entre os termos t e q, página 17
$\max_\rho$	máximo entre termos de tipo ρ, página 120
Mt	majorante do termo t, página 132

x^M	"candidato" a majorante de x, página 131
$A[\underline{t}/\underline{x}]$	substituição simultânea das variáveis $\underline{x}$ pelos termos $\underline{t}$ na fórmula A, página 17
$q[\underline{t}/\underline{x}]$	substituição simultânea das variáveis $\underline{x}$ pelos termos $\underline{t}$ no termo q, página 17
$\underline{\rho}$	uplo (eventualmente vazio) $\rho_1, \ldots, \rho_k$ de tipos, página 31
$\underline{\rho}^t$	uplo de tipos $\underline{\rho}$ pela ordem inversa, página 31
$\underline{t}$	uplo (eventualmente vazio) $t_1, \ldots, t_n$ de termos, página 17
$\frac{A}{B}$	regra "de A infere-se B", página 18

Índice