Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel

Jaime Gaspar

Univ. of Kent e Univ. Nova de Lisboa

1 Contexto histórico

No final do século XIX e no início do século XX foram descobertos vários paradoxos em matemática que mostraram a necessidade de fundamentar a matemática em bases rigorosas e contribuíram para a chamada Crise dos Fundamentos da Matemática [7]. Vejamos dois desses paradoxos.

Função de Weierstrass Até 1872, os matemáticos tinham a intuição de que qualquer função contínua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tinha de ser derivável em "quase todos" os pontos de $\mathbb{R}$ [19]. Em 1872, o matemático alemão Karl Weierstrass (1815–1897) [11] surpreendeu ao apresentar a função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$ (onde $0 < a < 1$, b é ímpar e $ab > 1 + 3\pi/2$) que é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$ e derivável em nenhum ponto de $\mathbb{R}$ [19]. Ver Figura 1.

Paradoxo de Russell Até 1901, os matemáticos tinham a intuição de que dada qualquer propriedade $P(x)$, era possível formar o conjunto $\{x : P(x)\}$ [17]. Em 1901, o matemático britânico Bertrand Russell (1872–1970) [2] surpreendeu descobrindo um paradoxo: tomando $P(x)$ como sendo a propriedade $x \notin x$, poderíamos formar o conjunto $X = \{x : x \notin x\}$, para o qual temos a contradição $X \in X \Leftrightarrow X \notin X$ [17]. Ver Figura 2.

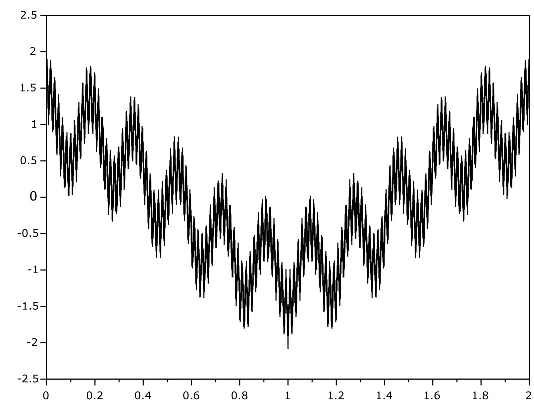

Figura 1: Gráfico da Função de Weierstrass com $a = 0{,}52$ e $b = 11$ entre $x = 0$ e $x = 2$.

$$\boxed{\begin{array}{c} X = \{x : x \notin x\} \\ X \in X \;\Leftrightarrow\; X \notin X \end{array}}$$

Figura 2: Paradoxo de Russell.

O matemático alemão David Hilbert (1862–1943) [5] propôs o chamado Programa de Hilbert para resolver a Crise dos Fundamentos da Matemática [9]. O Programa de Hilbert consiste em fundamentar a matemática num sistema com certas componentes e propriedades.

As componentes são as seguintes [9].

Linguagem O sistema deve ter uma linguagem rigorosamente definida na qual escrevemos as afirmações em matemática (ficando em aberto qual é exatamente a linguagem).

Regras O sistema deve ter um conjunto de regras rigorosamente definidas com as quais manipulamos as afirmações (ficando em aberto quais são exatamente as regras).

As propriedades são as seguintes [9].

Completude O sistema deve demonstrar ou refutar (isto é, demonstrar a negação de) qualquer afirmação.

Consistência O sistema não deve demonstrar contradições e tal facto deve ser demonstrado "finitisticamente" (isto é, por métodos que operam sobre objetos finitos e concretos, ficando em aberto o significado exato de "finitisticamente").

Conservação O sistema deve ser tal que resultados sobre objetos "reais" (isto é, objetos finitos e concretos, ficando em aberto o significado exato de "reais") que sejam demonstrados usando objetos "ideais" (isto é, objetos infinitos ou abstratos, ficando em aberto o significado exato de "ideais") devem poder ser demonstrados usando só objetos "reais".

Decidibilidade Deve existir um algoritmo que decida se uma afirmação é demonstrável ou refutável (esta propriedade é essencialmente uma consequência da completude [6]).

Em 1930, numa conferência em que participaram Hilbert e o matemático austríaco Kurt Gödel (1906–1978) [12], Hilbert proferiu um discurso em que reafirmou o Programa de Hilbert enquanto Gödel anunciou o seu Primeiro Teorema da Incompletude que (como veremos adiante) mostra que o Programa de Hilbert é inexequível [8].

2 Enunciado

Quando falarmos de *fórmulas*, estamos a considerar as fórmulas que se escrevem usando a negação $\neg$, a conjunção $\wedge$, a disjunção $\vee$, a implicação $\to$, a equivalência $\leftrightarrow$, o quantificador universal $\forall$, o quantificador existencial $\exists$, o zero 0, as variáveis $x, y, z, \ldots$, a igualdade $=$, o sucessor S, a adição $+$, a multiplicação $\cdot$ e possivelmente outros símbolos como $<$ e $\in$ [16]. Dizemos que uma fórmula é *fechada* [18] se e só se a fórmula não tem variáveis não quantificadas. Escrevemos $T \vdash F$ para dizer que uma teoria T demonstra uma fórmula F.

Para compreender o enunciado do Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel precisamos de introduzir as seguintes quatro noções que ocorrem no enunciado.

Aritmética de Robinson A *Aritmética de Robinson* Q [16] é a teoria com os seguintes axiomas:

$$\begin{aligned} &\forall x\ \neg(\mathrm{S}x = 0)\,, \\ &\forall x, y\ (\mathrm{S}x = \mathrm{S}y \to x = y)\,, \\ &\forall y\ (y = 0 \vee \exists x\ \mathrm{S}x = y)\,, \\ &\forall x\ x + 0 = x\,, \\ &\forall x, y\ x + \mathrm{S}y = \mathrm{S}(x + y)\,, \\ &\forall x\ x \cdot 0 = 0\,, \\ &\forall x, y\ x \cdot \mathrm{S}y = x \cdot y + x\,. \end{aligned}$$

Conter Q é o padrão do que significa ser capaz de expressar aritmética elementar [8]. Por exemplo, a Aritmética de Peano e a Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel contêm Q.

Teoria consistente Dizemos que uma teoria T é *consistente* [4] se e só se não existe uma fórmula F fechada tal que $T \vdash F$ e $T \vdash \neg F$, ou equivalentemente (supondo que T contêm Q), $T \nvdash 0 = 1$ (onde $1 = \mathrm{S}0$). É desejável que uma teoria seja consistente porque uma teoria inconsistente demonstra falsidades (porque demonstra as fórmulas F e $\neg F$ e uma delas será falsa). Por exemplo, quase todos os matemáticos acreditam que a Aritmética de Peano e a Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel são teorias consistentes.

Teoria recursivamente axiomatizável Dizemos que uma teoria é *recursivamente* [15] *axiomatizável* [1] se e só se ela admite um conjunto de axiomas tal que existe um algoritmo que decide se uma fórmula é um axioma. É desejável que uma teoria seja recursivamente axiomatizável porque para verificarmos se uma demonstração na teoria é realmente uma demonstração precisamos de, quando a demonstração apela a uma fórmula que diz ser um axioma, conseguir verificar que a fórmula é realmente um axioma [8]. Por exemplo, a Aritmética de Peano e a Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel são teorias recursivamente axiomatizáveis [8].

Teoria incompleta Dizemos que uma teoria T é *incompleta* [3] se e só se existe uma fórmula F fechada tal que $T \nvdash F$ e $T \nvdash \neg F$. É indesejável que uma teoria seja incompleta porque tal significa que existe uma fórmula F fechada sobre a qual a teoria é ignorante (não consegue demonstrar nem refutar F). Por exemplo, a Aritmética de Peano (que não demonstra nem refuta o Teorema de Goodstein) e a Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (que não demonstra nem refuta a Hipótese do Contínuo) são teorias incompletas [8].

Introduzidas as quatro noções de que precisamos, estamos finalmente em condições de enunciar o Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel (com o enunciado na versão do matemático americano John Rosser (1907–1989) [10] que é mais simples e forte do que a versão de Gödel, e a demonstração na versão de Gödel). Este teorema diz, *grosso modo*, que todas as teorias razoáveis para fundamentar a matemática (contendo Q, consistentes e recursivamente axiomatizáveis) são incompletas [8].

Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel [8]. *Se T é uma teoria (1) contendo Q, (2) consistente e (3) recursivamente axiomatizável, então (4) é incompleta.*

Demonstração (esboço) [14]. Fazemos a demonstração com (2) fortalecido para

$$\begin{array}{c}\text{não existe uma fórmula } F(x) \text{ tal que}\\ T \vdash F(n) \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ e } T \vdash \exists x\ \neg F(x) \text{ [13].}\end{array} \tag{2'}$$

Fixemos uma enumeração das fórmulas e denotemos por $\dot{F}$ o número da fórmula F nessa enumeração. Por (1), (2′) e (3), existe (omitimos a justificação complicada) uma fórmula $\mathrm{D}(x)$ tal que, para toda a fórmula F fechada,

$$T \vdash F \iff T \vdash \mathrm{D}(\dot{F}) \tag{5}$$

(informalmente, $\mathrm{D}(\dot{F})$ expressa $T \vdash F$). Existe (omitimos a justificação complicada) uma fórmula F fechada tal que $\mathrm{Q} \vdash F \leftrightarrow \neg \mathrm{D}(\dot{F})$, logo, por (1),

$$T \vdash F \leftrightarrow \neg \mathrm{D}(\dot{F}) \tag{6}$$

(informalmente, F expressa $T \nvdash F$). Vejamos que $T \nvdash F$ e $T \nvdash \neg F$, concluindo (4).

- Se $T \vdash F$, então $T \vdash \mathrm{D}(\dot{F})$ por (5), logo $T \vdash \neg F$ por (6), contradizendo (2).
- Se $T \vdash \neg F$, então $T \vdash \mathrm{D}(\dot{F})$ por (6), logo $T \vdash F$ por (5), contradizendo (2). □

3 Discussão

Uma consequência do Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel é que todas as teorias matemáticas razoáveis para fundamentar a matemática são incompletas, o que pode ser interpretado como implicando que há limites para o que se pode conhecer matematicamente.

Outra consequência do Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel é que o Programa de Hilbert é inexequível [8]: o sistema de Hilbert conteria Q (porque fundamentaria toda a matemática em geral e portanto Q em particular) e seria consistente e recursivamente axiomatizável (porque seria decidível), logo não poderia ser completo.

A demonstração do Primeiro Teorema da Completude de Gödel lembra o Paradoxo do Mentiroso: a afirmação «esta afirmação é falsa» não é verdadeira nem falsa [8]. Realmente, a demonstração usa uma variante do Paradoxo do Mentiroso em que «esta afirmação é falsa» é substituída por uma fórmula F que (informalmente) diz «esta fórmula é indemonstrável» [8].

Podíamos pensar em tentar tornar uma teoria T completa adicionando-lhe como novo axioma a fórmula F (ou $\neg F$) fechada da demonstração do Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel, que é tal que $T \nvdash F$ e $T \nvdash \neg F$, obtendo uma nova teoria T' completa, mas tal não funciona porque o Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel também se aplica a T': a sua demonstração constrói uma nova fórmula F' fechada tal que $T' \nvdash F'$ e $T' \nvdash \neg F'$ [8].

Podíamos pensar que uma teoria à qual se aplique o Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel é incompleta por lhe faltarem axiomas, mas o Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel continua a aplicar-se se adicionarmos à teoria um número finito de axiomas (que mantenham a teoria consistente), ou mesmo um número infinito de axiomas desde que a nova teoria ainda seja recursivamente axiomatizável (e mantenha-se consistente), pelo que a nova teoria ainda é incompleta [8].

Podíamos pensar em tornar uma teoria completa adicionando-lhe todas as fórmulas fechadas verdadeiras como novos axiomas [8]. Tal resulta realmente numa teoria completa mas não recursivamente axiomatizável, o que é indesejável e não contradiz o Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel [8].

Existe um Segundo Teorema da Incompletude de Gödel que diz (essencialmente) o seguinte: se T é uma teoria contendo Q, consistente e existe uma fórmula D como a da demonstração do Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel satisfazendo certas propriedades, então T não demonstra a fórmula $\neg \mathrm{D}(0 \doteq 1)$ que diz que T é consistente [8]. O Segundo Teorema da Incompletude de Gödel diz, *grosso modo*, que as teorias razoáveis para fundamentar a matemática não conseguem demonstrar a sua própria consistência [8].

Agradecimentos. Financiado por uma Research Postgraduate Scholarship do Engineering and Physical Sciences Research Council /School of Computing, University of Kent. Agradeço a Fernando Ferreira, Gilda Ferreira, Reinhard Kahle e um árbitro/revisor anônimo.

Referências

[1] Wikipedia. *Axiomatic system*. `https://en.wikipedia.org/wiki/Axiomatic_system` Acedido a 2015-11-20.

[2] Wikipedia. *Bertrand Russell*. `https://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand_Russell` Acedido a 2015-11-20.

[3] Wikipedia. *Complete theory*. `https://en.wikipedia.org/wiki/Complete_theory` Acedido a 2015-11-20.

[4] Wikipedia. *Consistency*. `https://en.wikipedia.org/wiki/Consistency` Acedido a 2015-11-20.

[5] Wikipedia. *David Hilbert*. `https://en.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert` Acedido a 2015-11-20.

[6] Wikipedia. *Decidability (logic)*. `https://en.wikipedia.org/wiki/Decidability_%28logic%29` Acedido a 2016-05-02.

[7] Wikipedia. *Foundations of mathematics*. `https://en.wikipedia.org/wiki/Foundations_of_mathematics` Acedido a 2015-11-20.

[8] Wikipedia. *Gödel's incompleteness theorems*. `https://en.wikipedia.org/wiki/G%C3%B6del's_incompleteness_theorems` Acedido a 2015-11-20.

[9] Wikipedia. *Hilbert's program*. `https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_program` Acedido a 2015-11-20.

[10] Wikipedia. *J. Barkley Rosser*. `https://en.wikipedia.org/wiki/J._Barkley_Rosser` Acedido a 2015-11-20.

[11] Wikipedia. *Karl Weierstrass*. `https://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Weierstrass` Acedido a 2015-11-20.

[12] WIKIPEDIA. *Kurt Gödel*.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Kurt_G%C3%B6del`
Acedido a 2015-11-20.

[13] WIKIPEDIA. *ω-consistent theory*.
`https://en.wikipedia.org/wiki/%CE%A9-consistent_theory`
Acedido a 2015-11-20.

[14] FERNANDO FERREIRA. *Princípios de Lógica Matemática*. Manuscrito, 2005.

[15] WIKIPEDIA. *Recursive set*.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Recursive_set`
Acedido a 2015-11-20.

[16] WIKIPEDIA. *Robinson arithmetic*.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Robinson_arithmetic`
Acedido a 2015-11-20.

[17] WIKIPEDIA. *Russell's paradox*.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Russell's_paradox`
Acedido a 2015-11-20.

[18] WIKIPEDIA. *Sentence (logic)*.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Sentence_%28logic%29`
Acedido a 2015-11-20.

[19] WIKIPEDIA. *Weierstrass function*.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_function`
Acedido a 2015-11-20.

Jaime Gaspar
School of Computing, University of Kent
Canterbury, Kent, CT2 7NF, Reino Unido
Centro de Matemática e Aplicações (CMA), FCT, UNL
`www.jaimegaspar.com`
`www.cs.kent.ac.uk/people/rpg/jg478`

`mail@jaimegaspar.com`
`jg478@kent.ac.uk`